

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

# Teoria dell'elasticità

Editori Riuniti Edizioni Mir

I edizione: marzo 1979  
Titolo originale: *Teorija uprugosti*  
Traduzione di Piero Negrini  
© Copyright by Edizioni Mir, Mosca  
© Copyright by Editori Riuniti  
Via Serchio, 9/11 - 00198 Roma  
CL 63-1948-3

Nuova biblioteca di cultura 192

Collana diretta da Ignazio Ambrogio

*Serie scientifica*

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

# Fisica teorica 7

Editori Riuniti Edizioni Mir

# Indice

<i>Prefazione</i> . . . . .	7
<i>Alcune notazioni</i> . . . . .	8
<b>CAPITOLO I. EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ</b>	
§ 1. <i>Tensore di deformazione</i> . . . . .	9
§ 2. <i>Tensore degli sforzi</i> . . . . .	13
§ 3. <i>Termodinamica della deformazione</i> . . . . .	17
§ 4. <i>Legge di Hooke</i> . . . . .	20
§ 5. <i>Deformazioni omogenee</i> . . . . .	23
§ 6. <i>Deformazioni con variazione di temperatura</i> . . . . .	26
§ 7. <i>Equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi</i> . . . . .	28
§ 8. <i>Equilibrio di un mezzo elastico limitato da un piano</i> . . . . .	37
§ 9. <i>Contatto tra corpi solidi</i> . . . . .	43
§ 10. <i>Proprietà elastiche dei cristalli</i> . . . . .	49
<b>CAPITOLO II. EQUILIBRIO DI SBARRE E LAMINE</b>	
§ 11. <i>Energia di flessione di una lamina</i> . . . . .	58
§ 12. <i>Equazione d'equilibrio di una lamina</i> . . . . .	60
§ 13. <i>Deformazione longitudinale delle lamine</i> . . . . .	68
§ 14. <i>Flessione forte di una lamina</i> . . . . .	74
§ 15. <i>Deformazioni degli involuppi</i> . . . . .	78
§ 16. <i>Torsione di sbarre</i> . . . . .	86
§ 17. <i>Flessione di sbarre</i> . . . . .	93
§ 18. <i>Energia di una sbarra deformata</i> . . . . .	97
§ 19. <i>Equazioni di equilibrio delle sbarre</i> . . . . .	102
§ 20. <i>Flessione debole di una sbarra</i> . . . . .	110
§ 21. <i>Stabilità dei sistemi elastici</i> . . . . .	121
<b>CAPITOLO III. ONDE ELASTICHE</b>	
§ 22. <i>Onde elastiche in un mezzo isotropo</i> . . . . .	126
§ 23. <i>Onde elastiche nei cristalli</i> . . . . .	133
§ 24. <i>Onde superficiali</i> . . . . .	135
§ 25. <i>Vibrazioni di sbarre e lamine</i> . . . . .	140
§ 26. <i>Vibrazioni anarmoniche</i> . . . . .	147
<b>CAPITOLO IV. DISLOCAZIONI</b>	
§ 27. <i>Deformazioni elastiche in presenza di dislocazioni</i> . . . . .	152
§ 28. <i>Azione del campo di sforzi sulla dislocazione</i> . . . . .	161

## INDICE

§ 29. Distribuzione continua di dislocazioni . . . . .	164
§ 30. Distribuzione di dislocazioni in interazione . . . . .	170
§ 31. Equilibrio di una fessura in un mezzo elastico . . . . .	174
CAPITOLO V. CONDUZIONE TERMICA E VISCOSITÀ NEI CORPI SOLIDI	
§ 32. Equazione del calore nei solidi . . . . .	181
§ 33. Conduzione del calore nei cristalli . . . . .	183
§ 34. Viscosità dei corpi solidi . . . . .	184
§ 35. Assorbimento del suono nei corpi solidi . . . . .	187
§ 36. Liquidi molto viscosi . . . . .	195
<i>Indice analitico</i> . . . . .	197

## Dalla prefazione alla seconda edizione russa

*Oltre ad alcune correzioni ed aggiunte, il libro è stato completato con un nuovo capitolo sulla teoria macroscopica delle dislocazioni, scritto in collaborazione con A. Kossevič. Colgo qui l'occasione per esprimere tutta la mia riconoscenza per l'aiuto che mi ha in questo modo offerto. Studiando il libro in una prospettiva di « minimo teorico », i fisici teorici potranno tralasciare i paragrafi 8, 9, 11-21, 25-31.*

E. Lifšits

Dicembre 1964

## Dalla prefazione alla prima edizione russa

*...In questo libro scritto da fisici e destinato in primo luogo ai fisici, il nostro interesse si è naturalmente focalizzato sugli argomenti che vengono trattati marginalmente nei corsi di elasticità; ad esempio, i problemi della termoconduzione e della viscosità dei corpi solidi, alcune questioni della teoria delle vibrazioni e delle onde elastiche. Nello stesso tempo, abbiamo toccato solo di sfuggita settori specifici (per esempio, i metodi matematici complessi della teoria dell'elasticità, della teoria delle membrane, ecc.), in cui gli autori non hanno alcuna pretesa di essere specialisti.*

L. Landau, E. Lifšits

1953

## Alcune notazioni

Densità di materia:  $\rho$

Vettore di spostamento:  $\mathbf{u}$

Tensore di deformazione:  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$

Tensore degli sforzi:  $\sigma_{ik}$

Modulo di compressione uniforme:  $K$

Modulo di trazione (modulo di Young):  $E$

Modulo di scorrimento:  $\mu$

Coefficiente di Poisson:  $\sigma$

Velocità longitudinale e trasversale del suono:  $c_l, c_t$  (le loro espressioni in funzione di  $K, \mu$ , o  $E, \sigma$  sono a pag. 127)

$K, \mu$  e  $E, \sigma$  sono così correlate:

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}, \quad \sigma = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)},$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

I rimandi agli altri volumi di questo corso sono indicati mediante i numeri relativi ai volumi stessi: V (« Fisica statistica », 1977), VI (« Meccanica dei fluidi »), VIII (« Elettrodinamica dei mezzi continui »)

# Capitolo I

## EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

### § 1. Tensore di deformazione

Il dominio della teoria dell'elasticità è costituito dalla meccanica dei corpi solidi, considerati in quanto mezzi continui<sup>1)</sup>.

Sottoposti a forze, i corpi solidi si deformano in una certa misura, cioè cambiano di forma e di volume. La descrizione matematica della deformazione di un corpo si effettua come segue. Ogni punto del corpo è identificato, in un sistema di coordinate, dal suo raggio vettore  $\mathbf{r}$  (di componenti  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ). Nella deformazione del corpo, in generale, tutti i suoi punti si spostano. Consideriamone uno qualunque; se  $\mathbf{r}$  è il raggio vettore prima della deformazione, a seguito di questa diviene  $\mathbf{r}'$  (di componenti  $x'_i$ ). Allora lo spostamento di tale punto nella deformazione è rappresentato dal vettore  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , designato con  $\mathbf{u}$ :

$$u_i = x'_i - x_i. \quad (1,1)$$

Tale vettore si denomina *vettore di deformazione* (o di *spostamento*). Le coordinate  $x'_i$  del punto spostato sono evidentemente funzioni delle coordinate  $x_i$  del punto prima dello spostamento; ne consegue che il vettore di deformazione  $u_i$  è esso stesso funzione delle  $x_i$ . La conoscenza della dipendenza funzionale di  $\mathbf{u}$  dalle  $x_i$  determina completamente la deformazione del corpo.

Nel corso della deformazione di un corpo variano le mutue distanze tra i suoi punti. Consideriamo due punti infinitamente vicini. Se  $dx_i$  indicano le componenti del vettore differenza tra i corrispondenti raggi vettori prima della deformazione, queste si trasformano in  $dx'_i = dx_i + du_i$ . La distanza tra i due punti prima della deformazione è

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

e diventa

$$dl' = \sqrt{dx'_1^2 + dx'_2^2 + dx'_3^2}$$

1) Le equazioni fondamentali della teoria dell'elasticità sono state poste da Cauchy e da Poisson attorno agli anni venti del XIX secolo.

Scriveremo, facendo uso della convenzione usuale per quanto riguarda la somma<sup>1)</sup>,

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Sostituendo  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , riscriviamo per  $dl'^2$

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Poiché  $i$  e  $k$  sono indici muti, nel secondo termine a destra dell'ugualanza si ha

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

Scambiando nel terzo termine gli indici  $i$  ed  $l$ , segue:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \quad (1,2)$$

ove il tensore  $u_{ik}$  è definito da

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1,3)$$

Queste espressioni determinano la variazione dell'elemento di lunghezza a seguito della deformazione del corpo.

Ad  $u_{ik}$  si dà il nome di *tensore di deformazione*. È evidentemente un tensore simmetrico:

$$u_{ik} = u_{ki}. \quad (1,4)$$

Si è ottenuto un siffatto tensore in quanto in  $dl'^2$  il termine  $2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$  è stato riscritto nella forma simmetrica  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$ .

Come ogni tensore simmetrico,  $u_{ik}$  può essere, in ogni punto, ricondotto ai suoi assi principali. Ciò significa che in ogni punto del corpo si può scegliere un sistema di coordinate (gli assi principali del tensore) rispetto al quale  $u_{ik}$  è « diagonale », cioè ha per componenti non nulle solo  $u_{11}, u_{22}, u_{33}$ . Designeremo queste tre componenti rispettivamente con  $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ , che vengono dette valori principali del tensore di deformazione. Vogliamo sottolineare che se  $u_{ik}$  è ridotto a forma diagonale in un punto del corpo, in generale esso non rimarrà tale passando ad altri punti.

Supponiamo che in un certo punto il tensore sia stato ridotto alla forma diagonale; allora in tutto l'intorno di detto punto l'elemento di lunghezza (1,2) prende la forma

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + \\ + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2.$$

<sup>1)</sup> Secondo tale convenzione si omette il simbolo di somma sugli indici vettoriali e tensoriali; si intende che indici ripetuti sottintendono una somma sul loro campo di variabilità (da 1 a 3).

Si osserva così che questa espressione si scinde in una somma di tre addendi indipendenti. Questo significa che, in ogni elemento di volume del corpo, si può rappresentare la deformazione mediante tre deformazioni indipendenti lungo tre direzioni ortogonali, che sono le direzioni assegnate dagli assi principali del tensore di deformazione. Ciascuna di queste deformazioni è semplicemente una dilatazione (o una contrazione) nella direzione corrispondente: la lunghezza  $dx_1$  lungo il primo asse principale diventa  $dx'_1 = \sqrt{1 + 2u^{(1)}} dx_1$ , e analogamente per i restanti assi. Le grandezze  $\sqrt{1 + 2u^{(i)}}$  rappresentano allora le dilatazioni relative  $\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i}$  lungo questi assi.

In pratica, nella quasi totalità dei casi che si considerano, le deformazioni dei corpi sono piccole. Questo significa che la variazione delle distanze tra i punti nel corpo è piccola raffrontata alle distanze stesse. In altri termini, le dilatazioni relative sono infinitesimi di ordine superiore. Pertanto tutte le deformazioni considerate nel seguito saranno supposte piccole.

Se un corpo subisce una deformazione piccola, tutte le componenti del tensore di deformazione che, come abbiamo visto, determina le variazioni delle lunghezze relative, sono anch'esse piccole. Ma, per quel che concerne il vettore stesso di deformazione  $u_i$ , esso può essere ugualmente grande anche per piccole deformazioni. Per esemplificare, consideriamo una sbarra sottile. Anche in una flessione forte, allorché le sue estremità si spostano considerevolmente nello spazio, le dilatazioni e le contrazioni nella sbarra stessa sono trascurabili.

A parte casi particolari<sup>1)</sup> di tal genere, quando le deformazioni sono piccole tale è anche lo stesso vettore di deformazione. In effetti, non esiste corpo « tridimensionale » (le cui dimensioni cioè non siano piccole in alcuna direzione) che possa essere deformato in modo tale che le sue diverse parti si spostino considerevolmente nello spazio, senza che ciò comporti conseguentemente rilevanti dilatazioni o contrazioni.

Le sbarre sottili saranno oggetto di uno studio particolare nel capitolo II. In tutti gli altri casi dunque  $u_i$  è piccolo se tali sono le deformazioni e nella (1,3) potrà trascurarsi l'ultimo termine in quanto infinitesimo del secondo ordine. Così, in queste circostanze,  $u_{ik}$  assume la seguente forma:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1,5)$$

<sup>1)</sup> Sono compresi in questi le flessioni delle lame sottili che prendono la forma di superfici cilindriche.

Le dilatazioni relative degli elementi di lunghezza secondo gli assi principali del tensore di deformazione (nel punto prefissato) sono allora, a parte termini di ordine superiore,

$$\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)},$$

cioè, coincidono coi valori principali del tensore  $u_{ii}$ .

Consideriamo un elemento di volume arbitrario  $dV$  e cerchiamo la sua espressione  $dV'$ , a seguito della deformazione. A tale scopo, sceglieremo come riferimento quello costituito dagli assi principali del tensore di deformazione, nel punto considerato. Gli elementi di lunghezza  $dx_1, dx_2, dx_3$  lungo tali direzioni diventano, a seguito della deformazione,  $dx'_1 = (1 + u^{(1)}) dx_1$ , ecc. Ma  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  e  $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ , pertanto

$$dV' = dV (1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}).$$

Trascurando i termini di ordine superiore, si ha

$$dV' = dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}).$$

È noto che la somma  $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$  dei valori principali di un tensore è un invariante di detto tensore, uguale in ogni sistema di coordinate alla somma delle componenti diagonali  $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$ . Dunque

$$dV' = dV (1 + u_{ii}). \quad (1,6)$$

Si vede che la somma delle componenti diagonali del tensore di deformazione rappresenta la variazione relativa di volume  $\frac{dV' - dV}{dV}$ .

Spesso è più comodo servirsi delle componenti del tensore di deformazione espresse non in coordinate cartesiane, ma in coordinate sferiche o cilindriche. Riportiamo qui sotto le formule corrispondenti che forniscono queste componenti in funzione delle derivate delle componenti, nelle stesse coordinate, del vettore spostamento.

In coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\ &+ \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, & 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) + \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, & 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (1,7)$$

In coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (1,8) \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

### § 2. Tensore degli sforzi

In un corpo non deformato la configurazione delle molecole corrisponde allo stato del suo equilibrio termico, mentre tutte le sue parti si trovano in equilibrio meccanico. Questo significa che, se si considera un volume arbitrario del corpo, la risultante di tutte le forze, che le altre parti del corpo esercitano sul volume considerato, è nulla.

Ma se il corpo è deformato, la posizione delle molecole varia, il corpo si porta fuori del suo stato di equilibrio iniziale e nascono forze, dette *sforzi interni*, che tendono a riportare il corpo nel suo stato di equilibrio. Se il corpo non è deformato, gli sforzi sono nulli.

Gli sforzi interni sono dovuti a forze molecolari, cioè forze di interazione tra molecole. Un fatto essenziale nell'elasticità è che le forze molecolari possiedono un « raggio d'azione » trascurabile, estendendo la loro influenza su lunghezze dell'ordine della distanza tra molecole vicine. Ora, nella teoria dell'elasticità (che è una teoria macroscopica) intervengono soltanto lunghezze grandi rispetto alle distanze tra molecole. Pertanto si considera in elasticità come nullo il « raggio d'azione » delle forze molecolari. Questo equivale a dire, in un certo senso, che le forze che provocano gli sforzi interni sono forze a « corto raggio », esercitando in ogni punto la loro azione solo sui punti vicini. Ne consegue che le forze, con le quali una parte qualunque del corpo è sollecitata dalle parti contigue, agiscono solo direttamente attraverso la superficie di tale parte.

Dobbiamo fare subito un'osservazione: questa affermazione è falsa quando la deformazione provoca nel corpo l'insorgere di campi elettrici macroscopici (corpi piro- e piezoelettrici). Ma in questo libro non verranno considerate le proprietà di tali corpi.

Scegliamo un volume qualunque nel corpo e consideriamo la risultante delle forze che agiscono su tale volume. Da una parte tale risultante è uguale alla somma di tutte le forze che agiscono sugli elementi del volume prescelto, cioè vale

$$\int \mathbf{F} dV,$$

dove  $\mathbf{F}$  è la forza che agisce sul volume unitario del corpo, talché  $\mathbf{F} dV$  agisce su  $dV$ . Dall'altra le forze, che le diverse parti di questo

volume esercitano reciprocamente le une sulle altre, non possono avere un effetto non nullo perché, in virtù del principio di azione e reazione, tali forze si annullano vicendevolmente. Quindi la risultante cercata si può ottenere come la risultante delle sole forze con cui il volume è sollecitato dalle parti contigue al corpo. Ma, tenuto conto di quanto si è detto sopra, queste forze agiscono sul volume solo attraverso la sua superficie, quindi la risultante potrà essere scritta come la somma delle forze che agiscono su ogni elemento di superficie del volume, cioè sotto forma di un integrale di superficie.

Pertanto, per un qualsivoglia volume del corpo, ciascuna delle tre componenti  $\int F_i dV$  della risultante di tutti gli sforzi interni può essere trasformata in un integrale di superficie sulla frontiera di questo volume. Come è noto dall'analisi vettoriale, un integrale di uno scalare su un volume arbitrario può essere trasformato in integrale di superficie, purché tale scalare si presenti come divergenza di un vettore. Nel nostro caso si ha a che fare con l'integrale di un vettore invece che di uno scalare. Pertanto il vettore  $F_i$  deve essere la divergenza di un tensore del secondo ordine, cioè

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2,1)$$

Potremo allora scrivere la forza che si esercita su di un volume nella forma di integrale di superficie esteso alla frontiera di tale volume<sup>1)</sup>

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (2,2)$$

dove le  $df_i$  sono le componenti del vettore  $df$  dell'elemento di superficie diretto, come è usuale, secondo la normale esterna alla superficie<sup>2)</sup>.

$\sigma_{ik}$  si chiama tensore degli sforzi. Risulta dalla (2,2) che  $\sigma_{ik} df_k$  è l' $i$ -esima componente della forza che agisce sull'elemento di superficie  $df$ . Scegliendo gli elementi di superficie nei piani  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ , si trova che la componente  $\sigma_{ik}$  del tensore degli sforzi è l' $i$ -esima componente della forza agente sull'unità di superficie perpendicolare all'asse  $x_k$ . Quindi l'elemento di superficie unitaria perpendicolare

<sup>1)</sup> Si passa dall'integrale di superficie all'integrale di volume sostituendo l'elemento di superficie  $df_i$  con l'operatore  $dV \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

<sup>2)</sup> A rigore, nel determinare la forza totale che agisce sul volume deformato del corpo si dovrebbe integrare sulle  $x'_i$  e non sulle antiche coordinate. Pertanto le derivate (2,1) devono essere fatte rispetto a  $x'_i$ . Tuttavia, poiché le deformazioni sono piccole, le derivate rispetto a  $x_i$  e  $x'_i$  differiscono per infinitesimi di ordine superiore, e tutte le derivate possono essere fatte rispetto alle  $x_i$ .

all'asse  $x$  è sottoposto alla forza normale (diretta lungo l'asse  $x$ )  $\sigma_{xx}$  e alle forze tangenziali (secondo gli assi  $y$  e  $z$ )  $\sigma_{yx}$  e  $\sigma_{zx}$ .

Un'osservazione sul segno di  $\sigma_{ih} df_h$ . Nella (2,2) l'integrale di superficie è la forza con cui il volume delimitato da tale superficie è sollecitato dalle parti contigue del corpo. Viceversa, la forza con cui questo volume reagisce sulla superficie che lo contorna è di segno contrario. Dunque, l'azione degli sforzi interni su tutta la superficie del corpo è rappresentata dalla forza

$$-\oint \sigma_{ih} df_h,$$

dove l'integrale è preso sulla superficie del corpo e  $df$  è orientato secondo la normale esterna.

Determiniamo il momento delle forze che agiscono su un volume del corpo. È noto che il momento di una forza  $F$  può scriversi sotto forma di un tensore antisimmetrico del secondo ordine, di componenti  $F_i x_k - F_k x_i$ , ove le  $x_i$  sono le coordinate del punto di applicazione della forza<sup>1)</sup>. Il momento delle forze agenti su un volume  $dV$  è quindi  $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ , e su tutto il volume

$$M_{ih} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV.$$

Come per la forza totale agente su un volume arbitrario, così il momento delle forze deve essere rappresentato da un integrale di superficie esteso alla frontiera di tale volume. Sostituendo ad  $F_i$  la sua espressione (2,1) si ha

$$\begin{aligned} M_{ih} &= \int \left( \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV - \int \left( \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV. \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale interviene la derivata di una componente rispetto ad un'altra, che è zero o uno a seconda che queste siano diverse o coincidano (in quanto le tre coordinate sono variabili indipendenti). Dunque,  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ , ove  $\delta_{kl}$  è il tensore unità; il suo prodotto con  $\sigma_{ik}$  dà  $\delta_{kl} \sigma_{il} = \sigma_{ik}$ ,  $\delta_{il} \sigma_{kl} = \sigma_{ki}$ . Nel primo termine sotto il segno di integrale figura la divergenza di un tensore; questo integrale può essere trasformato dunque in un integrale di superficie. Si ottiene in definitiva

$$M_{ih} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV.$$

<sup>1)</sup> Il momento di una forza  $F$  è definito come il prodotto vettoriale  $[Fr]$ ; è noto dall'analisi vettoriale che le componenti di un prodotto vettoriale di due vettori definiscono un tensore antisimmetrico del secondo ordine, qual è quello scritto.

Se debbono figurare nell'espressione di  $M_{ik}$  solo integrali di superficie, occorre che il secondo integrale si annulli identicamente, dunque  $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$ , cioè

$$\sigma_{ik} = \sigma_{hi}. \quad (2,3)$$

Abbiamo così stabilito un risultato rilevante: il tensore degli sforzi deve essere simmetrico. Il momento delle forze agenti su un volume di un corpo può scriversi allora nella forma

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l. \quad (2,4)$$

Si può scrivere facilmente il tensore degli sforzi quando un corpo subisce una *compressione uniforme*. In questo caso ogni superficie unitaria è sottoposta ad una pressione di uguale intensità diretta lungo la normale interna alla superficie. Se si designa questa pressione con  $p$ , la forza agente sull'elemento di superficie  $df_i$  sarà  $-p df_i$ . D'altra parte, l'espressione di questa forza in funzione del tensore degli sforzi è  $\sigma_{ik} df_k$ . Scrivendo  $-p df_i$  nella forma  $-p \delta_{ik} df_k$ , si vede che in una compressione uniforme il tensore degli sforzi si scrive

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (2,5)$$

Tutte le componenti non nulle sono semplicemente uguali alla pressione.

Nel caso generale di una deformazione arbitraria le componenti non diagonali del tensore degli sforzi non saranno nulle. Questo significa che oltre alla forza normale su ogni elemento di superficie interno al corpo agiscono anche forze tangenziali, «di sfaldatura», che hanno la tendenza a far scorrere gli uni sugli altri gli elementi paralleli della superficie.

All'equilibrio le forze degli sforzi interni debbono compensarsi mutuamente in ogni elemento di volume, cioè deve avversi  $F_i = 0$ . In questo modo le equazioni dell'equilibrio di un corpo deformato si scrivono

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial x_h} = 0. \quad (2,6)$$

Nel campo di gravità dovrà annullarsi la somma  $\mathbf{F} + \rho g$  delle forze degli sforzi interni e della forza di gravità  $\rho g$  agente sull'unità di volume ( $\rho$  è la densità<sup>1)</sup>,  $g$  l'accelerazione di gravità diretta lungo la verticale, orientata verso il basso). Le equazioni dell'equilibrio in questo caso divengono

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial x_h} + \rho g_i = 0. \quad (2,7)$$

<sup>1)</sup> A rigore, la densità del corpo varia nella deformazione, ma questa variazione conduce ad effetti di ordine superiore quando la deformazione è piccola, e pertanto potrà essere trascurata.

Per quel che riguarda le forze esterne applicate direttamente alla superficie del corpo (e che di solito sono all'origine della deformazione), esse entrano come condizioni ai limiti, associate alle equazioni dell'equilibrio. Sia  $P_i$  la forza esterna agente sull'area unitaria della superficie del corpo,  $P_i df$  è allora la forza agente sull'elemento  $df$ . All'equilibrio essa deve essere compensata dalla forza  $-\sigma_{ik} df_k$ , con cui gli sforzi interni agiscono su questo elemento. Si avrà

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0.$$

Scrivendo  $df_k$  come  $df_k = n_k df$ ,  $n$  essendo il versore della normale esterna alla superficie, segue:

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \quad (2,8)$$

Questa condizione deve essere soddisfatta su tutta la superficie del corpo in equilibrio.

Deriviamo la formula del valor medio del tensore degli sforzi in un corpo deformato. A tal fine moltiplichiamo la (2.6) per  $x_k$  e integriamo su tutto il volume del corpo

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il} x_k) dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0.$$

Trasformiamo il primo integrale nel secondo membro in un integrale superficiale e osserviamo che nel secondo si ha  $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$ .

Allora segue:

$$\oint \sigma_{il} x_k df_l - \int \sigma_{ik} dV = 0.$$

Sostituendo la (2,8) nel primo integrale, otteniamo

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = V \bar{\sigma}_{ik},$$

dove  $V$  è il volume del corpo e  $\bar{\sigma}_{ik}$  il valor medio del tensore degli sforzi nell'intero volume. Poiché  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ , si può riscrivere informa più simmetrica

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df. \quad (2,9)$$

Così dunque, il valor medio del tensore degli sforzi può essere determinato direttamente in funzione delle forze esterne che agiscono sul corpo, senza passare attraverso le equazioni di equilibrio.

### § 3. Termodinamica della deformazione

Seguiamo ora la deformazione di un corpo e supponiamo che il vettore deformazione  $u_i$  vari di una quantità piccola  $\delta u_i$ . Determiniamo in queste condizioni il lavoro effettuato dalle forze degli

sforzi interni. Moltiplichiamo la forza  $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  per lo spostamento  $\delta u_i$  e integriamo su tutto il volume del corpo, ottenendo

$$\int \delta R \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, dV.$$

Si è indicato con  $\delta R$  il lavoro delle forze interni nell'unità di volume del corpo. Integrando per parti si ha

$$\int \delta R \, dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \, dV.$$

Considerando il caso di un mezzo illimitato, privo di deformazioni all'infinito, portiamo nel primo integrale del secondo membro la superficie d'integrazione all'infinito; si ha  $\sigma_{ik} = 0$  su tale superficie e quindi l'integrale svanisce. D'altra parte, tenuto conto della simmetria di  $\sigma_{ik}$ , il secondo integrale si può riscrivere

$$\begin{aligned} \int \delta R \, dV &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \, dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \, dV = -\int \sigma_{ik} \delta u_{ik} \, dV. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (3,1)$$

Questa formula fornisce il lavoro  $\delta R$  a seguito della variazione del tensore di deformazione.

Se la deformazione è abbastanza piccola, il corpo ritorna nel suo stato iniziale non deformato quando le forze esterne che provocano la deformazione sono rimosse. Deformazioni siffatte si chiamano *elastiche*. Se le deformazioni non sono piccole, all'annullarsi delle forze non spariscono, ma persiste una deformazione residua e lo stato del corpo si differenzia da quello iniziale. Tali deformazioni si definiscono *plastiche*. Nel seguito (ad eccezione del capitolo IV) si considerano solo deformazioni elastiche.

Supponiamo ora che la deformazione sia così lenta che in ogni istante si stabilisca lo stato di equilibrio termodinamico corrispondente alle condizioni esterne in cui il corpo si trova istantaneamente (questa condizione è praticamente sempre verificata). Allora, come è noto, la trasformazione è termodinamicamente reversibile.

Conveniamo per il seguito di riportare tutte le grandezze termodinamiche — quali l'entropia  $S$ , l'energia interna  $E$ , ecc. — all'unità di volume del corpo<sup>1)</sup> (e non all'unità di massa come si con-

<sup>1)</sup> Precisiamo: a rigore bisogna distinguere le unità di volume del corpo prima e dopo la deformazione. In generale questi volumi contengono una quantità di materia diversa. Tutte le grandezze termodinamiche nel seguito saranno riferite all'unità di volume del corpo non deformato, cioè alla quantità di materia che esso contiene, e che dopo la deformazione può venire ad occupare un volume leggermente diverso da quello iniziale. Si troverà in questo modo l'energia totale del corpo integrando  $E$  sul volume del corpo non deformato.

viene nella meccanica dei fluidi) e di designarle con le maiuscole corrispondenti.

La variazione infinitesima  $d\mathcal{E}$  dell'energia interna è uguale alla differenza tra la quantità di calore ricevuto nell'unità di volume considerato del corpo e il lavoro  $dR$  delle forze degli sforzi interni. In una trasformazione reversibile la quantità di calore è  $T dS$ ,  $T$  essendo la temperatura. Allora  $d\mathcal{E} = T dS - dR$ ; con l'espressione (3,1) per  $dR$ , si ha

$$d\mathcal{E} = T dS + \sigma_{ik} du_{ik} \quad (3,2)$$

che rappresenta la relazione termodinamica fondamentale per i corpi deformati.

Nel caso di compressione uniforme, il tensore degli sforzi è  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$  (2,5); allora

$$\sigma_{ik} du_{ik} = -p\delta_{ik} du_{ik} = -p du_{ii}.$$

Ora, come risulta dalla (1,6), la somma  $u_{ii}$  è la variazione relativa del volume nella deformazione. Dunque per l'unità di volume,  $u_{ii}$  rappresenta semplicemente la variazione di detto volume e  $du_{ii}$  l'elemento  $dV$  di questa variazione. La relazione termodinamica si riconduce all'espressione nota

$$d\mathcal{E} = T dS - p dV.$$

Introducendo al posto di  $\mathcal{E}$  l'energia libera del corpo  $F = \mathcal{E} - TS$  la (3,2) si riscrive

$$dF = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3,3)$$

Infine per il potenziale termodinamico  $\Phi$  si ha

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik} u_{ik} = F - \sigma_{ik} u_{ik} \quad (3,4)$$

che è la generalizzazione dell'espressione usuale  $\Phi = \mathcal{E} - TS + pV$ . Usando la (3,4) nella (3,3) si ha

$$d\Phi = -S dT - u_{ik} d\sigma_{ik}. \quad (3,5)$$

Le variabili indipendenti nelle (3,2) e (3,3) sono rispettivamente  $S$ ,  $u_{ik}$  e  $T$ ,  $u_{ik}$ . Si possono così ottenere le componenti del tensore degli sforzi derivando  $\mathcal{E}$  o  $F$  rispetto alle componenti del tensore di deformazione, riguardando come costanti rispettivamente  $S$  e  $T$ :

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T. \quad (3,6)$$

<sup>1)</sup> Nel caso della compressione uniforme l'espressione (3,4) diviene

$$\Phi = F + pu_{ii} = F + p(V - V_0),$$

dove  $V - V_0$  è la variazione del volume causata dalla deformazione. Si noti che la presente definizione di  $\Phi$  si differenzia da quella ordinaria, usata in termodinamica,  $\Phi = F + pV$ , per l'addendo  $-pV_0$ .

Nello stesso modo, derivando  $\Phi$  rispetto alle componenti  $\sigma_{ik}$ , si ottiene

$$u_{ih} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ih}} \right)_T. \quad (3,7)$$

#### § 4. Legge di Hooke

Per poter applicare ad un caso specifico le relazioni termodinamiche sopra determinate, è necessario conoscere l'espressione dell'energia libera  $F$  del corpo in funzione del tensore di deformazione. Questa espressione si trova facilmente, nel caso delle piccole deformazioni sviluppando l'energia libera in serie di potenze di  $u_{ih}$ . Ci limitiamo per il momento alla considerazione dei corpi isotropi, rinviano al § 10 la deduzione delle corrispondenti espressioni nel caso dei cristalli.

Dato un corpo deformato che si trovi ad una certa temperatura (costante in tutto il corpo), considereremo come suo stato non deformato quello che si ha in assenza di forze esterne, alla stessa temperatura (questa precisazione è necessaria a causa del fenomeno di dilatazione termica, vedi § 6). Ora, per  $u_{ih} = 0$  non si hanno sforzi, cioè  $\sigma_{ih} = 0$ . Poiché  $\sigma_{ih} = \frac{\partial F}{\partial u_{ih}}$ , nello sviluppo di  $F$  in potenze di  $u_{ih}$  non compaiono termini lineari.

Dato che l'energia libera  $F$  è uno scalare, ogni termine dello sviluppo sarà uno scalare. Con un tensore simmetrico  $u_{ih}$  si possono costruire due scalari indipendenti di secondo grado; si possono assumere come tali  $u_{ii}^2$ , il quadrato della somma delle componenti diagonali, e  $u_{ih}^2$ , la somma dei quadrati delle componenti del tensore  $u_{ih}$ . Sviluppando  $F$  in serie di potenze di  $u_{ih}$ , si ottiene dunque, arrestandosi ai termini del secondo ordine, un'espressione della forma

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ih}^2 \quad (4,1)$$

che fornisce l'espressione generale dell'energia libera di un corpo isotropo deformato,  $\lambda$  e  $\mu$  essendo noti come *coefficienti di Lamé*.

Si è visto (§ 1) che la variazione del volume in una deformazione è determinata dalla somma  $u_{ii}$ . Se questa somma è nulla ne consegue che il volume resta inalterato e si ha solo un cambiamento di forma. Deformazioni siffatte, a volume costante, forniscono gli *scorrimenti*. Il caso opposto è quello in cui resta fissa la forma e cambia invece il volume, in modo tale che ogni elemento di volume resta *simile* a se stesso nel corso della deformazione. Si è visto (§ 1) che il tensore di una siffatta deformazione è della forma  $u_{ih} = \text{cost.} \cdot \delta_{ih}$ ; queste deformazioni sono *compressioni uniformi*.

Ogni deformazione può decomporsi in una somma di uno scorrimento e di una compressione uniforme. Basta a tal fine scrivere

l'identità

$$u_{ih} = \left( u_{ih} - \frac{1}{3} \delta_{ih} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ih} u_{ll}. \quad (4,2)$$

Il primo termine nel secondo membro è evidentemente uno scorrimento puro (infatti la somma dei termini diagonali è nulla, ricordando che  $\delta_{ii} = 3$ ), il secondo è una compressione uniforme.

È comodo usare invece della (4,1) l'espressione generale dell'energia libera del corpo deformato che si ottiene facendo uso della decomposizione (4,2). Allora, scegliendo come scalari indipendenti di secondo grado i quadrati delle componenti del primo e secondo termine nella (4,2),  $F$  diventa<sup>1)</sup>

$$F = \mu \left( u_{ih} - \frac{1}{3} \delta_{ih} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2, \quad (4,3)$$

dove  $K$  e  $\mu$  sono rispettivamente il *modulo di compressione uniforme* e il *modulo di scorrimento*.  $K$  è legato ai coefficienti di Lamé dalla relazione

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (4,4)$$

È noto che nello stato di equilibrio termodinamico l'energia libera è minima. Se il corpo non subisce azioni da parte di forze esterne,  $F$  come funzione di  $u_{ih}$  deve avere un minimo per  $u_{ih} = 0$ . Questo comporta che la forma quadratica (4,3) deve essere positiva. Se il tensore  $u_{ih}$  è scelto in modo che  $u_{ll} = 0$ , sussisterà nella (4,3) solo il primo termine; se invece è scelto in modo tale che  $u_{ih} = \text{cost.} \cdot \delta_{ih}$ , sopravvive solo il secondo termine. Dunque condizione necessaria (e palesemente sufficiente) affinché la forma (4,3) sia positiva è che  $K$  e  $\mu$  siano positivi. Ne discende che i moduli di compressione e scorrimento sono sempre positivi:

$$K > 0, \quad \mu > 0. \quad (4,5)$$

Utilizziamo ora la relazione termodinamica generale (3,6) per definire il tensore degli sforzi. Per calcolare le derivate  $\frac{\partial F}{\partial u_{ih}}$  scriviamo il differenziale totale  $dF$  (a temperatura costante). Si ha

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left( u_{ih} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ih} \right) d \left( u_{ih} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ih} \right).$$

Nel secondo membro il prodotto per  $\delta_{ih}$  dell'espressione nella prima parentesi dà zero e resta

$$dF = Ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left( u_{ih} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ih} \right) du_{ih}$$

<sup>1)</sup> Il termine costante  $F_0$ , cioè l'energia libera del corpo non deformato, non presenta alcun interesse e pertanto l'omettiamo, intendendo così che  $F$  rappresenta la sola energia libera di deformazione, detta « energia libera elastica ».

ovvero, scrivendo  $du_{ii}$  nella forma  $\delta_{ik} du_{ik}$ ,

$$dF = \left[ Ku_{ii}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ii}\delta_{ik} \right) \right] du_{ik}.$$

Si ha così per il tensore degli sforzi

$$\sigma_{ik} = Ku_{ii}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ii}\delta_{ik} \right). \quad (4,6)$$

Questa espressione definisce il tensore degli sforzi in funzione del tensore di deformazione per un corpo isotropo. In particolare si osserva che se la deformazione è uno scorrimento puro o una compressione uniforme pura, il legame tra  $\sigma_{ik}$  e  $u_{ik}$  è determinato rispettivamente dal modulo di scorrimento e dal modulo di compressione uniforme.

Si possono trovare facilmente le formule inverse della (4,6) che fornisce le  $u_{ik}$  in funzione di  $\sigma_{ik}$ . A tal fine troviamo la somma dei termini diagonali  $\sigma_{ii}$ . Allora il secondo termine si annulla e si ha  $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$  ovvero

$$u_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{ii}. \quad (4,7)$$

Sostituendo questa espressione nella (4,6), si ha per le  $u_{ik}$

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ii} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ii} \right), \quad (4,8)$$

il che definisce il tensore di deformazione in funzione del tensore degli sforzi.

La (4,7) mostra che la variazione relativa del volume  $u_{ii}$ , in ogni deformazione di un corpo isotropo, dipende solo dalla somma  $\sigma_{ii}$  delle componenti diagonali del tensore degli sforzi, il legame tra le  $\sigma_{ii}$  e  $u_{ii}$  essendo determinato dal solo modulo di compressione uniforme  $K$ . Per un corpo in compressione uniforme il tensore degli sforzi si scrive  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ , e allora dalla (4,7) si deduce

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \quad (4,9)$$

Poiché le deformazioni sono piccole, e quindi sono piccoli  $u_{ii}$  e  $p$ , si può scrivere il rapporto  $\frac{u_{ii}}{p}$  della variazione relativa del volume e della pressione nella forma differenziale  $\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ . Così

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

$\frac{1}{K}$  essendo il *coefficiente di compressione uniforme* (o semplicemente coefficiente di compressione).

Segue dalla (4,8) che il tensore di deformazione  $u_{ik}$  è una funzione lineare del tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}$ . Detto altrimenti, la deformazione

è proporzionale alle forze applicate al corpo. Questa legge che pre-siede alle piccole deformazioni è detta *legge di Hooke*<sup>1)</sup>.

Diamo un'altra espressione utile dell'energia libera di un corpo deformato: questa si ottiene immediatamente osservando che  $F$  è una funzione quadratica del tensore di deformazione; applicando allora il teorema di Eulero,

$$u_{ik} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F$$

e tenendo conto del fatto che  $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \sigma_{ik}$ , si ottiene

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2}. \quad (4,10)$$

Se in questa formula si esprimono le  $u_{ik}$  per il tramite della (4,8), l'energia elastica diviene una funzione quadratica delle  $\sigma_{ik}$ , e con un'ulteriore applicazione del teorema di Eulero, si ha

$$\sigma_{ik} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F$$

che, confrontata con la (4,10), fornisce

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \quad (4,11)$$

Dobbiamo precisare che mentre la formula  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  è una relazione termodinamica generale, la sua inversa (4,11) è vera solo nell'ambito di validità della legge di Hooke.

### § 5. Deformazioni omogenee

Considereremo nel seguito alcuni casi semplici di *deformazioni omogenee*, cioè deformazioni il cui tensore di deformazione è costante in tutto il volume del corpo. Un esempio è già stato fornito dall'esame della compressione uniforme.

Soffermiamoci ora sulla *trazione* (o *compressione*) *semplice* di una sbarra. Supponiamo la sbarra allineata lungo l'asse  $z$ , e siano applicate ai suoi estremi forze agenti in versi opposti; queste forze agiscono uniformemente su tutta l'area delle sezioni; con  $p$  indichiamo la forza per unità di area.

La deformazione è omogenea, quindi le  $u_{ik}$  sono costanti in tutto il corpo e altrettanto costanti sono le  $\sigma_{ik}$ , che si possono dedurre quindi direttamente dalle condizioni ai limiti (2,8). Le forze sulla superficie laterale sono nulle e quindi  $\sigma_{ik} n_k = 0$ . Il vettore

<sup>1)</sup> In effetti la legge di Hooke si applica praticamente a tutte le deformazioni elastiche. Le deformazioni, in generale, cessano di essere elastiche quando, essendo ancora sufficientemente piccole, la legge di Hooke è ancora una valida approssimazione (fanno eccezione corpi come il caucciù).

unitario  $\mathbf{n}$  è su questa superficie laterale perpendicolare all'asse  $z$ , quindi ha componenti non nulle  $n_x$  e  $n_y$ , e di conseguenza sono nulle tutte le  $\sigma_{ik}$ , eccetto  $\sigma_{zz}$ . Sulle sezioni estreme della sbarra si ha  $\sigma_{zi}n_i = p$  e quindi  $\sigma_{zz} = p$ .

La relazione generale (4,8) tra le componenti del tensore di deformazione e degli sforzi mostra che tutte le  $u_{ik}$ , con  $i \neq k$ , sono nulle. Per le altre componenti si trova

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p. \quad (5,1)$$

La componente  $u_{zz}$  definisce l'allungamento relativo della sbarra lungo l'asse  $z$ . Il coefficiente di  $p$  è detto *coefficiente di trazione* ed il suo inverso *modulo di trazione* (o *modulo di Young*)  $E$ :

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \quad (5,2)$$

dove

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}. \quad (5,3)$$

Le componenti  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  determinano la compressione relativa trasversale della sbarra. Il rapporto tra compressione trasversale e allungamento longitudinale è detto *coefficiente di Poisson*<sup>1)</sup>:

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \quad (5,4)$$

dove

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K-2\mu}{3K+\mu}. \quad (5,5)$$

Essendo  $K$  e  $\mu$  positivi, il coefficiente di Poisson può variare, al variare dei materiali, solo tra  $-1$  ( $K=0$ ) e  $\frac{1}{2}$  ( $\mu=0$ ). Quindi<sup>2)</sup>

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (5,6)$$

Infine, l'incremento relativo del volume della sbarra in trazione è

$$u_{ii} = \frac{1}{3K} p. \quad (5,7)$$

<sup>1)</sup> Non vi può essere confusione di notazione tra  $\sigma$ , coefficiente di Poisson, e  $\sigma_{ik}$ , componenti del tensore degli sforzi, data la presenza degli indici in questi ultimi.

<sup>2)</sup> In realtà il coefficiente di Poisson varia tra 0 e  $\frac{1}{2}$ . Non si conoscono in natura corpi per cui  $\sigma < 0$ , cioè che si dilatano allungandosi. Sottolineiamo che  $\sigma > 0$  comporta  $\lambda > 0$ , dove  $\lambda$  è il coefficiente di Lamé nella (4,1), cioè i due termini nella (4,1) sono sempre positivi come nella (4,3) malgrado che questo non discenda necessariamente da considerazioni termodinamiche. I valori di  $\sigma$  vicini a  $\frac{1}{2}$  (per esempio per il caucciù) corrispondono ad un modulo di scorrimento piccolo rispetto al modulo di compressione.

Si può scrivere l'energia libera della sbarra utilizzando direttamente la (4,10). Poiché solo  $\sigma_{zz}$  è diversa da zero, si ha  $F = \frac{1}{2} \sigma_{zz} u_{zz}$  e

$$F = \frac{p^2}{2E}. \quad (5,8)$$

Seguendo l'uso, impiegheremo nel seguito  $E$  e  $\sigma$  al posto dei moduli  $K$  e  $\mu$ . Invertendo le formule (5,3) e (5,5), si ottiene<sup>1)</sup>

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \quad (5,9)$$

Scriviamo le formule generali del paragrafo precedente, servendoci per i coefficienti che vi figurano delle corrispondenti espressioni per il tramite di  $E$  e  $\sigma$ . Per l'energia libera si ha

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2 \right). \quad (5,10)$$

Il tensore degli sforzi espresso in termini del tensore di deformazione è

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right). \quad (5,11)$$

Inversamente

$$u_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ll} \delta_{ik}]. \quad (5,12)$$

Le formule (5,11) e (5,12) interverranno frequentemente nel seguito e pertanto converrà darne le espressioni esplicite:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{xx} + \sigma (u_{yy} + u_{zz})], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{yy} + \sigma (u_{xx} + u_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma (u_{xx} + u_{yy})], \end{aligned} \quad (5,13)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz}$$

e le formule inverse:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \sigma (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \end{aligned} \quad (5,14)$$

<sup>1)</sup> Il secondo coefficiente di Lamé è

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}.$$

$$u_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})],$$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{yz}.$$

Consideriamo ora la compressione di una sbarra costretta lateralmente in modo tale che le sue dimensioni trasversali non varino. Le forze esterne di compressione sono applicate alle basi della sbarra e agiscono secondo la lunghezza, che assumeremo come asse  $z$ . Il caso descritto si designa come *compressione uniaxiale*. La sbarra è deformata lungo l'asse  $z$  e quindi tra tutte le componenti di  $u_{ik}$  è diversa da zero solo  $u_{zz}$ . Dalle (5,13) segue:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}.$$

Indicando nuovamente la forza di compressione con  $p$  ( $\sigma_{zz} = p$ ,  $p$  è negativo in compressione), si ha

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p. \quad (5,15)$$

Il coefficiente di  $p$  è il coefficiente di compressione uniaxiale. Per le componenti degli sforzi trasversali si ha

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (5,16)$$

Infine l'energia libera è

$$F = p^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \quad (5,17)$$

### § 6. Deformazioni con variazione di temperatura

Prendiamo ora in considerazione deformazioni durante le quali la temperatura del corpo varia, tale variazione essendo provocata dalla deformazione stessa o da altre cause.

Assumeremo come stato non deformato di un corpo quello corrispondente ad assenza di forze esterne e ad una temperatura fissata  $T_0$ . Se la temperatura del corpo è  $T \neq T_0$ , esso in generale risulterà deformato a seguito della dilatazione termica, anche ove siano assenti forze esterne. In tal modo, oltre ai termini quadratici, lo sviluppo dell'energia libera  $F(T)$  conterrà anche termini lineari nel tensore di deformazione. A partire dalle componenti  $u_{ik}$  di un tensore del secondo ordine si può costruire un solo scalare lineare, e cioè la somma  $u_{ii}$  delle componenti diagonali. Supporremo qui che la variazione della temperatura  $T - T_0$ , che accompagna la deformazione, sia piccola. Di conseguenza, si potrà assumere che il fattore di  $u_{ii}$  nello sviluppo di  $F$  (che deve annullarsi per  $T = T_0$ ) sia semplicemente proporzionale a  $T - T_0$ . In definitiva, si ha

per l'energia libera l'espressione seguente, che sostituisce la (4,3):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2, \quad (6,1)$$

dove il coefficiente di  $T - T_0$  è stato scritto come  $-K\alpha$ . Le quantità  $\mu$ ,  $K$ ,  $\alpha$  saranno supposte costanti; la dipendenza dalla temperatura condurrebbe a termini correttivi di ordine superiore.

Derivando la  $F$  rispetto a  $u_{ik}$ , si ottiene il tensore degli sforzi

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right). \quad (6,2)$$

Il primo termine rappresenta gli sforzi supplementari dovuti alla variazione della temperatura del corpo. Nella dilatazione termica libera del corpo (in assenza di forze esterne) gli sforzi interni sono nulli. Annnullandosi  $\sigma_{ik}$  si trova che  $u_{ik}$  ha la forma  $\text{cost.} \cdot \delta_{ik}$ , con

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \quad (6,3)$$

Ora,  $u_{ll}$  è la variazione relativa del volume nella deformazione e pertanto  $\alpha$  è il *coefficiente di dilatazione termica* del corpo.

Tra le diverse deformazioni che si possono prendere in esame dal punto di vista termodinamico, bisogna distinguere quelle isoterme e quelle adiabatiche. Nella deformazione isoterma la temperatura non varia e ponendo nella (6,1)  $T = T_0$  ritroviamo le formule usuali; allora  $K$  e  $\mu$  possono dirsi *moduli isotermiti*.

Le deformazioni adiabatiche sono quelle che si effettuano senza scambio di calore tra le diverse parti del corpo e, ovviamente, tra il corpo e l'ambiente. È noto che l'entropia è uguale a  $-\frac{\partial F}{\partial T}$ , derivata di  $F$  rispetto alla temperatura. Derivando la (6,1), al primo ordine in  $u_{ik}$  si ha

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \quad (6,4)$$

Uguagliando  $S$  ad una costante, potremo determinare la variazione  $T - T_0$  nella deformazione, che sarà proporzionale a  $u_{ll}$ . Sostituendo questa espressione di  $T - T_0$  nella (6,2), si trova per  $\sigma_{ik}$  l'espressione

$$\sigma_{ik} = K_{ad}u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik} \right), \quad (6,5)$$

avente lo stesso modulo di scorrimento  $\mu$ , ma modulo di compressione  $K_{ad}$  diverso da  $K$ . Tuttavia il legame tra modulo di compressione isotermo e modulo adiabatico può ottenersi senza effettuare il conto indicato, partendo dalla nota formula termodinamica

$$\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T + \frac{T}{C_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2$$

( $C_p$  è il calore specifico a pressione costante riferito alla unità di volume del corpo). Se  $V$  è il volume in cui si trasforma il volume

unitario a seguito della deformazione, le derivate  $\frac{\partial V}{\partial T}$  e  $\frac{\partial V}{\partial p}$  definiscono le variazioni relative di volume quando il corpo è riscaldato o compresso. In altri termini

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \alpha, \quad \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = -\frac{1}{K_{ad}}, \quad \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Quindi si ottiene il legame tra modulo adiabatico e modulo isotermo

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{ad} = \mu. \quad (6,6)$$

Per i moduli di trazione e i coefficienti di Poisson *adiabatici* si deducono facilmente le relazioni

$$E_{ad} = \frac{E}{1 - ET\alpha^2/9C_p}, \quad \sigma_{ad} = \frac{\sigma + ET\alpha^2/9C_p}{1 - ET\alpha^2/9C_p}. \quad (6,7)$$

Nei casi che si realizzano in natura, la quantità  $\frac{ET\alpha^2}{9C_p}$  è di solito piccola e si può scrivere con sufficiente precisione

$$E_{ad} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{ad} = \sigma + (1 + \sigma) E \frac{T\alpha^2}{9C_p}. \quad (6,8)$$

Nel corso di una deformazione isotermica il tensore degli sforzi è espresso dalla derivata dell'energia libera

$$\sigma_{ih} = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ih}} \right)_T.$$

Se l'entropia è costante si scriverà (cfr. la (3,6))

$$\sigma_{ih} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ih}} \right)_S,$$

ove  $\mathcal{E}$  è l'energia interna. Di conseguenza, nel caso di deformazioni adiabatiche, l'espressione seguente, analoga alla (4,3), determina non l'energia libera, ma semplicemente l'energia interna dell'unità di volume del corpo:

$$\mathcal{E} = \frac{K_{ad}}{2} u_{ii}^2 + \mu \left( u_{ii} - \frac{1}{3} u_{ii} \delta_{ih} \right)^2. \quad (6,9)$$

### § 7. Equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi

Deduciamo ora le equazioni di equilibrio dei corpi isotropi. A tal fine bisogna sostituire nelle equazioni generali (2,7)

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

l'espressione (5,11) del tensore degli sforzi. Si ha

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ii}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ih}}{\partial x_k}.$$

Sostituendovi  $u_{ih} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right)$ , si ottengono le equazioni dell'equilibrio nella forma

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \quad (7,1)$$

È comodo riscrivere queste equazioni in forma vettoriale. Le quantità  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h^2}$  sono le componenti del vettore  $\Delta u$  e  $\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \equiv \operatorname{div} u$ . In tal modo, le equazioni dell'equilibrio prendono la forma

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} u = -\rho g \frac{2(1+\sigma)}{E}. \quad (7,2)$$

Torna utile a volte riscrivere questa equazione in un modo leggermente differente, ricorrendo ad una formula di analisi vettoriale ben nota

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} u = \Delta u + \operatorname{rot} \operatorname{rot} u.$$

Allora per la (7,2) si ha

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} u - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = -\rho g \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (7,3)$$

Abbiamo scritto le equazioni dell'equilibrio nel campo uniforme delle forze di gravità, avendo in vista che queste ultime sono in elasticità le forze di « volume » più frequenti. Nel caso in cui ve ne siano altre, il vettore  $\rho g$  del secondo membro dell'equazione deve essere sostituito da un'altra densità di forze di volume.

Il caso più importante è quello in cui la deformazione è dovuta non a forze di volume ma a forze applicate sulla superficie del corpo. Allora l'equazione dell'equilibrio diviene

$$(1-2\sigma) \Delta u + \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad (7,4)$$

ovvero

$$2(1-\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - (1-2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = 0. \quad (7,5)$$

Le forze esterne intervengono nella soluzione solo per mezzo delle condizioni ai limiti.

Applicando l'operatore  $\operatorname{div}$  all'equazione (7,4) ed osservando che  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta$ , segue:

$$\Delta \operatorname{div} u = 0, \quad (7,6)$$

che dimostra che la funzione  $\operatorname{div} u$  (che determina la variazione di volume nel corso della deformazione) è una funzione armonica.

Pertanto, l'applicazione dell'operatore di Laplace alla (7,4) fornisce

$$(7,7) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} u_{00} = u_{00}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{00} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_{00} = 0.$$

cioè all'equilibrio il vettore deformazione soddisfa all'*equazione biarmonica*. Questi risultati sussistono in un campo di gravità uniforme (il secondo membro nella (7,2) svanisce nella derivazione), ma non sono più veri nel caso generale di forze di volume esterne variabili nel corpo.

Il fatto che il vettore deformazione soddisfi all'equazione biarmonica non significa affatto che l'integrale generale delle equazioni dell'equilibrio (in assenza di forze di volume) sia una funzione vettoriale biarmonica arbitraria; bisogna ricordarsi che la funzione  $\mathbf{u}(x, y, z)$  deve ancora in realtà verificare l'equazione alle derivate parziali di ordine inferiore (7,4). D'altra parte appare possibile esprimere l'integrale generale delle equazioni dell'equilibrio in funzione delle derivate di un vettore biarmonico arbitrario (vedi problema 10).

Se il corpo è riscaldato in modo non uniforme, occorre aggiungere nell'equazione dell'equilibrio un termine supplementare. Al tensore degli sforzi si aggiunge il termine  $-K\alpha(T - T_0)\delta_{ik}$  (cfr. la (6,2)) e ne consegue che in  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  si aggiunge il termine

$$-K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

In definitiva, le equazioni dell'equilibrio si presentano nella forma

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \alpha \nabla T. \quad (7,8)$$

Soffermiamoci sul caso particolare di *deformazioni piane*, cioè deformazioni per cui una delle componenti del vettore  $\mathbf{u}$  è nulla ( $u_z = 0$ ) e le altre dipendono solo da  $x$  e  $y$ . In conseguenza di ciò le componenti  $u_{zz}$ ,  $u_{xz}$ ,  $u_{yz}$  del tensore di deformazione si annullano identicamente e, con loro, le componenti  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  del tensore degli sforzi (ma non si annulla lo sforzo longitudinale  $\sigma_{zz}$ , che con la sua esistenza assicura l'invarianza della lunghezza del corpo nella direzione  $z$ ). Poiché nessuna quantità dipende da  $z$ , le equazioni dell'equilibrio (in assenza di forze esterne di volume)  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  si riducono alle due equazioni

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (7,9)$$

Le dipendenze funzionali di  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  sono allora nella forma più generale determinate da

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (7,10)$$

ove  $\chi$  è una funzione arbitraria di  $x$  e  $y$ . E facile ricavare l'equazione a cui essa deve soddisfare. Una tale equazione deve la sua origine al fatto che  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  si esprimono effettivamente in funzione di due sole quantità  $u_x$  e  $u_y$ , e non sono quindi indipendenti. Usando le formule (5,13) per la deformazione piana si ha

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}).$$

Ora

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta \chi, \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{u},$$

e poiché  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  è, in virtù della (7,6), una funzione armonica, ne consegue che la funzione  $\chi$  deve soddisfare la

$$\Delta \Delta \chi = 0, \quad (7,11)$$

quindi che  $\chi$  è biarmonica; tale funzione si denomina *funzione degli sforzi*. Una volta che si sia risolto il problema piano, e che quindi la  $\chi$  sia nota, lo sforzo longitudinale è dato direttamente da

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}) = \sigma (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

ovvero

$$\sigma_{zz} = \sigma \Delta \chi. \quad (7,12)$$

### P R O B L E M I

1. Determinare la deformazione di una sbarra lunga (lunghezza  $l$ ) posta verticalmente nel campo di gravità.

*Soluzione.* Assunto l'asse della sbarra come asse  $z$  e la base inferiore come piano  $x, y$ , le equazioni dell'equilibrio sono

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

Tutte le componenti  $\sigma_{ik}$ , eccetto  $\sigma_{zz}$ , debbono annullarsi sulla superficie laterale della sbarra, e sulla base superiore ( $z = l$ ) si ha  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . La soluzione delle equazioni dell'equilibrio che verifica queste condizioni è

$$\sigma_{zz} = -\rho g (l - z),$$

e tutte le altre  $\sigma_{ik} = 0$ . Le  $u_{ik}$  si determinano in funzione delle  $\sigma_{ik}$  nella forma

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g (l - z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g (l - z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0$$

quindi, integrando queste equazioni, si determinano le componenti del vettore deformazione

$$u_x = \frac{\sigma}{E} \rho g (l - z) x, \quad u_y = \frac{\sigma}{E} \rho g (l - z) y,$$

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E} \{ l^2 - (l - z)^2 - \sigma (x^2 + y^2) \}.$$

L'espressione di  $u_z$  soddisfa la condizione al limite  $u_z = 0$  in un solo punto della superficie inferiore della sbarra. Pertanto la soluzione trovata non estende la sua validità alle vicinanze della sezione inferiore della sbarra.

2. Determinare la deformazione di una corona sferica (con raggio esterno  $R_2$  e interno  $R_1$ ) sottoposta ad una pressione interna  $p_1$ ; la pressione esterna è  $p_2$ .

*Soluzione.* Assumiamo un sistema di coordinate sferiche con centro nella sfera. La deformazione  $\mathbf{u}$  è ovunque radiale e funzione della sola coordinata  $r$ . Ne consegue che  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  e l'equazione (7,5) assume la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

quindi

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{cost} \equiv 3a$$

ovvero

$$u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Le componenti del tensore di deformazione sono (cfr. le (1,7))

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}.$$

Lo sforzo radiale

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Le costanti  $a$  e  $b$  si deducono dalle condizioni ai limiti  $\sigma_{rr} = -p_1$  per  $r = R_1$  e  $\sigma_{rr} = -p_2$  per  $r = R_2$ . Se ne ricava

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Quindi la distribuzione degli sforzi nello spessore della corona sferica sottoposta ad una pressione interna  $p_1 = p$  e ad una pressione esterna  $p_2 = 0$  è data da

$$\sigma_{rr} = \frac{p R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left( 1 + \frac{R_2^3}{2r^3} \right).$$

Nel caso di una corona sottile,  $h = R_2 - R_1 \ll R$ , si ha approssimativamente

$$u = \frac{p R^3 (1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p R}{2h}, \quad \sigma_{rr} = \frac{p}{2}$$

( $\sigma_{rr}$  è il valore medio dello sforzo radiale rispetto allo spessore dello strato).

Si ottiene la distribuzione degli sforzi in un mezzo elastico illimitato con una cavità sferica (di raggio  $R$ ) sottoposto ad una compressione uniforme, ponendo  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p$ :

$$\sigma_{rr} = -p \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

Sulla frontiera della cavità gli sforzi tangenziali sono quindi superiori alla pressione all'infinito.

3. Determinare la deformazione di una palla piena (di raggio  $R$ ) sotto l'effetto del proprio campo di gravità.

*Soluzione.* La forza di gravità che agisce sull'unità di massa del corpo sferico è  $-g \frac{r}{R}$ . Sostituendo questa espressione in  $g$  nella (7,3), si ottiene per lo spostamento radiale l'equazione

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

La soluzione che si mantiene finita per  $r=0$  e soddisfa la condizione  $\sigma_{rr}=0$  per  $r=R$  è

$$u = -\frac{\rho g R (1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left[ \frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right].$$

Osserviamo che la sostanza è compressa ( $u_{rr} < 0$ ) nell'interno di una sfera di raggio  $R \sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$  e dilatata al di fuori di questa sfera ( $u_{rr} > 0$ ). La pressione nel centro della palla è

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} \rho g R.$$

4. Determinare la deformazione di un tubo cilindrico (di raggi esterno e interno  $R_2$  e  $R_1$ ) sottoposto ad una pressione interna  $p$ , mentre la pressione esterna è nulla<sup>1)</sup>.

*Soluzione.* Prendiamo un sistema di coordinate cilindriche con asse  $z$  coincidente con l'asse del cilindro. La pressione è uniforme lungo il tubo, quindi la deformazione consta di uno spostamento radiale puro  $u_r = u(r)$ . Come nel problema 2, si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = \text{cost} \equiv 2a,$$

quindi

$$u = ar + \frac{b}{r}.$$

Le componenti non nulle del tensore di deformazione (cfr. le (1,8)) sono

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

Dalle condizioni al contorno,  $\sigma_{rr} = 0$  per  $r = R_2$  e  $\sigma_{rr} = -p$  per  $r = R_1$ , si ha

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\sigma}{E}.$$

La distribuzione degli sforzi nello strato del tubo è data allora dalle formule

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\sigma \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Determinare la deformazione di un cilindro in rotazione uniforme attorno al suo asse.

*Soluzione.* Scrivendo nella (7,3) la forza centrifuga  $\rho\Omega^2 r$  invece della forza di gravità ( $\Omega$  è la velocità angolare), si ottiene in coordinate cilindriche per lo

<sup>1)</sup> Nei problemi 4, 5, 7 si assume che la lunghezza del cilindro sia mantenuta costante, in modo che non ci sia deformazione longitudinale.

spostamento  $u_r = u(r)$  l'equazione

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -\rho \Omega^2 r.$$

La soluzione che si mantiene finita per  $r = 0$  e che soddisfa le condizioni ai limiti  $\sigma_{rr} = 0$  per  $r = R$ , è

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

6. Determinare la deformazione di una palla riscaldata non uniformemente, con distribuzione di temperatura a simmetria sferica.

*Soluzione.* In coordinate sferiche, l'equazione (7,8) per una deformazione puramente radiale dà

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{dT}{dr}.$$

La soluzione che si mantiene finita per  $r = 0$  e soddisfa la condizione al limite  $\sigma_{rr} = 0$  per  $r = R$  è

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r^2 dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma} \frac{r}{R^3} \int_0^R T(r) r^2 dr \right\}.$$

La temperatura  $T(r)$  è misurata a partire dal valore per cui la palla uniformemente riscaldata è considerata non deformata; si è assunto come tale valore la temperatura della superficie esterna della sfera, con  $T(R) = 0$ .

7. Lo stesso problema per un cilindro riscaldato non uniformemente, con distribuzione di temperatura a simmetria assiale.

*Soluzione.* Analogamente al precedente problema, in coordinate cilindriche si ha

$$u = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r) r dr + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r) r dr \right\}.$$

8. Determinare la deformazione di un mezzo elastico infinito con una distribuzione di temperatura assegnata  $T(x, y, z)$ . Si suppone che questa temperatura tenda verso un valore costante  $T_0$  all'infinito, dove non c'è deformazione.

*Soluzione.* L'equazione (7,8) ammette evidentemente una soluzione per cui

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} [T(x, y, z) - T_0].$$

Il vettore  $\mathbf{u}$ , avente divergenza uguale alla funzione assegnata, definita su tutto lo spazio e nulla all'infinito e rotore identicamente nullo, si può scrivere, come è noto dall'analisi vettoriale, nella forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\text{div}' \mathbf{u}(x', y', z')}{r} dV',$$

con  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ . Pertanto si ottiene la soluzione generale del problema nella forma

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)} \nabla \int \frac{T' - T_0}{r} dV', \quad (1)$$

con  $T' \equiv T(x', y', z')$ .

Se una quantità finita di calore  $q$  viene sprigionata in un piccolo volume del mezzo illimitato (nell'origine delle coordinate), la distribuzione della temperatura può porsi nella forma ( $C$  è il calore specifico del mezzo)

$$T - T_0 = \frac{q}{C} \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

ove  $\delta$  è la funzione di Dirac. Allora l'integrale nella (1) vale  $\frac{q}{Cr}$  e la deformazione è assegnata dalla formula

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)C} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

9. Dedurre le equazioni dell'equilibrio di un corpo isotropo (in assenza di forze di volume), espresse in funzione delle componenti del tensore degli sforzi.

*Soluzione.* Il sistema di equazioni ricercate contiene, oltre alle tre equazioni

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

quelle che discendono dal fatto che le sei componenti di  $u_{ik}$  non sono tutte indipendenti. Per dedurle, scriviamo dapprima il sistema di relazioni differenziali a cui debbono soddisfare le componenti del tensore  $u_{ik}$ . È facile vedere che le quantità

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

soddisfano identicamente

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Si hanno in tutto sei relazioni distinte (corrispondenti ai seguenti valori di  $i, k, l, m$ : 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); queste relazioni rimarranno tutte se si contraggono gli indici  $l$  ed  $m$  nella relazione tensoriale sopra scritta:

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_l}. \quad (2)$$

Sostituendovi le espressioni (5,12) di  $u_{ik}$  in funzione di  $\sigma_{ik}$  e prendendo in considerazione la (1), si ottengono le relazioni cercate

$$(1+\sigma) \Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{il}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Queste equazioni continuano a sussistere quando il corpo subisce forze di volume esterne costanti su tutto il volume.

Contraendo nell'equazione (3) sugli indici  $i$  e  $k$  si trova

$$\Delta \sigma_{ll} = 0,$$

cioè  $\sigma_{ll}$  è una funzione armonica. Applicando alla (3) l'operatore  $\Delta$  segue:

$$\Delta \Delta \sigma_{ik} = 0$$

che mostra che le  $\sigma_{ik}$  sono funzioni biarmoniche; peraltro, questi risultati discendono anche dalle (7,6) e (7,7), visto che la relazione tra  $\sigma_{ik}$  e  $u_{ik}$  è lineare.

10. Esprimere l'integrale generale delle equazioni di equilibrio (in assenza di forze di volume) in funzione di un vettore biarmonico arbitrario (B. Galerkin, 1930).

*Soluzione.* È naturale cercare la soluzione dell'equazione (7,4) nella forma  
 $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} + A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}$ .

Se ne deduce che  $\operatorname{div} \mathbf{u} = (1 + A) \operatorname{div} \Delta \mathbf{f}$ . Sostituendo nella (7,4) si ha  
 $(1 - 2\sigma) \Delta \Delta \mathbf{f} + [2(1 - \sigma) A + 1] \operatorname{grad} \operatorname{div} \Delta \mathbf{f} = 0$ .

Allora, se  $\mathbf{f}$  è un vettore biarmonico arbitrario

$$\Delta \Delta \mathbf{f} = 0,$$

otteniamo

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

11. Scrivere gli sforzi  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  in una deformazione piana (in coordinate polari  $r$ ,  $\varphi$ ) come derivate della funzione degli sforzi.

*Soluzione.* Poiché le espressioni cercate non possono dipendere dalla scelta dell'origine per l'anomalia  $\varphi$ , esse non la conterranno esplicitamente. Allora potremo far uso del seguente procedimento: passando dalle derivate cartesiane (7,10) alle relative espressioni in termini delle variabili  $r$ ,  $\varphi$  osserveremo che

$$\sigma_{rr} = (\sigma_{xx})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = (\sigma_{yy})_{\varphi=0}, \quad \sigma_{r\varphi} = (\sigma_{xy})_{\varphi=0}$$

(l'angolo  $\varphi$  è contato a partire dall'asse  $x$ ). Si ottiene così

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right).$$

12. Determinare la distribuzione degli sforzi in un mezzo elastico infinito comprendente una cavità sferica, sapendo che il mezzo è sottoposto all'infinito ad una deformazione uniforme.

*Soluzione.* L'espressione generale di una deformazione uniforme è rappresentata da una trazione (o compressione) uniforme e da uno scorrimento uniforme. Poiché il caso corrispondente alla prima deformazione è stato trattato nel problema 2, ci limitiamo qui all'esame dello scorrimento uniforme.

Sia  $\sigma_{ik}^{(0)}$  il campo degli sforzi uniforme che si avrebbe in assenza di cavità; in uno scorrimento puro si ha  $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$ . Indichiamo con  $\mathbf{u}^{(0)}$  il vettore spostamento corrispondente e cerchiamo la soluzione nella forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$ , dove  $\mathbf{u}^{(1)}$  è il termine correttivo che tiene conto della presenza della cavità e che si annulla all'infinito.

Ogni soluzione di un'equazione biarmonica può essere scritta nella forma di una combinazione lineare di soluzioni a simmetria sferica e delle loro derivate, di diverso ordine, rispetto alle coordinate. Soluzioni a simmetria sferica indipendenti sono  $r^2$ ,  $r$ ,  $\frac{1}{r}$ , 1. Pertanto la forma più generale del vettore biarmonico  $\mathbf{u}^{(1)}$ , che ha una dipendenza parametrica dalle componenti del tensore costante  $\sigma_{ik}^{(0)}$  e che si annulla all'infinito, è

$$u_i^{(1)} = A \sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + B \sigma_{hl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} \frac{1}{r} + C \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} r. \quad (1)$$

Sostituendo questa espressione nella (7,4), si ottiene

$$(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = [2(1 - 2\sigma) C + (A + 2C)] \sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} \frac{1}{r} = 0$$

e quindi

$$A = -4C(1 - \sigma).$$

Due ulteriori relazioni tra le costanti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  discendono dalla condizione sulla frontiera della cavità:  $(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}) n_k = 0$  per  $r = R$  ( $R$  è il raggio della cavità, l'origine è presa nel centro,  $\mathbf{n}$  è il versore di  $\mathbf{r}$ ). Un calcolo assai lungo, con l'aiuto della (1), conduce al seguente risultato:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}.$$

L'espressione finale della distribuzione degli sforzi è

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \sigma_{ik}^{(0)} \left[ 1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^5 \right] + \\ & + \frac{15}{7-5\sigma} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left[ \sigma - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] (\sigma_{il}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \\ & + \frac{15}{2(7-5\sigma)} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left[ -5 + 7 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_h + \\ & + \frac{15}{2(7-5\sigma)} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left[ 1 - 2\sigma - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \delta_{ik} \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m . \end{aligned}$$

Per ottenere la distribuzione degli sforzi per  $\sigma_{ik}^{(0)}$  arbitrari (cioè non di scorrimento puro), si debbono sostituire in questa espressione  $\sigma_{ik}^{(0)} \rightarrow \sigma_{ik}^{(0)} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll}^{(0)}$  e aggiungere l'espressione

$$\frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(0)} \left[ \delta_{ik} + \frac{R^3}{2r^3} (\delta_{ik} - 3n_i n_h) \right],$$

che corrisponde alla trazione uniforme all'infinito (cfr. problema 2). Scrivereemo il risultato generale per gli sforzi sulla frontiera della cavità

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \frac{15}{7-5\sigma} \left\{ (1-\sigma) (\sigma_{ik}^{(0)} - \sigma_{il}^{(0)} n_l n_h - \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_h - \right. \\ & \left. - \sigma \sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m \delta_{ik} + \frac{5\sigma-1}{10} \sigma_{ll}^{(0)} (\delta_{ik} - n_i n_h) \right\}. \end{aligned}$$

Nelle vicinanze della cavità gli sforzi sono molto più intensi che all'infinito; questo incremento degli sforzi ha un carattere locale assai pronunciato e diminuisce rapidamente con la distanza (fenomeno di concentrazione degli sforzi nei pressi della cavità). Così, se il mezzo è sottoposto ad una trazione semplice uniforme (solo  $\sigma_{zz}^{(0)}$  è non nulla), gli sforzi massimi si produrranno all'equatore della cavità, e si avrà

$$\sigma_{zz} = \frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)} \sigma_{zz}^{(0)}.$$

### § 8. Equilibrio di un mezzo elastico limitato da un piano

Prendiamo in considerazione un mezzo elastico che invade un semispazio infinito, cioè a dire un mezzo limitato da una parte da un piano infinitamente esteso. Determiniamo la deformazione del mezzo sotto l'azione di forze applicate alla sua superficie libera<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Il procedimento più diretto e standard nella risoluzione del problema posto consiste nell'applicare all'equazione (8,1) il metodo di Fourier. Tuttavia, si avrebbero a calcolare integrali molto complicati. Qui si impiega un metodo che, facendo ricorso ad un certo numero di accorgimenti, richiede calcoli più semplici.

La distribuzione delle forze deve soddisfare una sola condizione, quella di annullarsi all'infinito talché non vi sia deformazione. In questo caso le equazioni dell'equilibrio si integrano sotto la forma generale.

In tutto il volume occupato dal mezzo si ha l'equazione dell'equilibrio (7,4)

$$\text{grad div } \mathbf{u} + (1 - 2\sigma) \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (8,1)$$

Cercheremo la soluzione nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla \varphi, \quad (8,2)$$

dove  $\varphi$  è uno scalare e il vettore  $\mathbf{f}$  soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta \mathbf{f} = 0. \quad (8,3)$$

Sostituendo (8,2) nella (8,1), si ricava l'equazione per  $\varphi$

$$2(1 - \sigma) \Delta \varphi = -\text{div } \mathbf{f}. \quad (8,4)$$

Prendiamo come piano  $x, y$  la superficie libera del mezzo elastico e l'asse  $z$  diretto verso l'interno. Scriviamo  $f_x$  e  $f_y$  come derivate, rispetto alla variabile  $z$ , delle corrispondenti componenti  $g_x$  e  $g_y$  di una funzione vettoriale  $g$ :

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \quad (8,5)$$

Poiché  $f_x$  e  $f_y$  sono funzioni armoniche,  $g_x$  e  $g_y$  possono essere scelte in modo tale da soddisfare l'equazione di Laplace

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0. \quad (8,6)$$

Allora la (8,4) diviene

$$2(1 - \sigma) \Delta \varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z \right).$$

Poiché  $g_x$ ,  $g_y$  e  $f_z$  sono funzioni armoniche, si constata facilmente che la funzione  $\varphi$  che soddisfa tale equazione può porsi nella forma

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)} \left( f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \psi, \quad (8,7)$$

dove  $\psi$  è anch'essa armonica:

$$\Delta \psi = 0. \quad (8,8)$$

Così la determinazione della deformazione  $\mathbf{u}$  è ricondotta alla ricerca delle funzioni  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $f_z$ ,  $\psi$ , tutte soddisfacenti l'equazione di Laplace.

Scriviamo le condizioni ai limiti che debbono essere verificate sulla superficie libera del mezzo ( $z = 0$ ).

Il versore  $\mathbf{n}$  della normale esterna è diretto nel verso delle  $z$  negative, quindi, secondo la formula generale (2,8), deve essere

$\sigma_{iz} = -P_i$ . Utilizzando l'espressione generale (5,11) di  $\sigma_{ik}$  ed esprimendo le componenti di  $\mathbf{u}$  in funzione delle quantità ausiliarie  $g_x, g_y, f_z$  e  $\psi$ , le condizioni al contorno si possono scrivere, dopo un breve calcolo, nella forma

$$\left. \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \right|_{z=0} = \\ = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \quad (8,9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \right|_{z=0} = \\ = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + \frac{2\partial \psi}{\partial z} \right\} \right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_z. \quad (8,10)$$

Le componenti  $P_x, P_y, P_z$  delle forze esterne applicate alla superficie sono funzioni assegnate delle coordinate  $x$  e  $y$ , e si annullano all'infinito.

Le grandezze ausiliarie  $g_x, g_y, f_z$  e  $\psi$  non sono determinate univocamente dalle formule con cui sono state introdotte, pertanto permane una certa arbitrarietà nella loro scelta; potremo quindi imporre una condizione arbitraria. Sarà allora comodo richiedere l'annullamento del termine entro parentesi graffe nelle equazioni (8,9)<sup>1)</sup>:

$$(1-2\sigma) f_z - \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 4(1-\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (8,11)$$

Allora le condizioni (8,9) si semplificano e diventano

$$\left. \frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \quad \left. \frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y. \quad (8,12)$$

Le equazioni (8,10)-(8,12) sono sufficienti per la determinazione delle funzioni armoniche  $g_x, g_y, f_z$  e  $\psi$ .

Per semplificare la scrittura delle formule che seguono, tratteremo il caso della forza *concentrata*  $\mathbf{F}$  che agisce sulla superficie libera del semispazio elastico, cioè di una forza applicata in una regione infinitesima della superficie, che può essere assimilata ad un punto. L'azione della forza può essere scritta come quella della forza superficiale distribuita secondo la legge

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \delta(x) \delta(y),$$

<sup>1)</sup> Non dimostreremo qui la possibilità di imporre questa condizione; essa viene giustificata naturalmente dal fatto che non ne discende alcuna contraddizione.

ove figura la funzione  $\delta$ , l'origine delle coordinate è presa nel punto di applicazione della forza. Nota la soluzione del problema per una forza concentrata, potremo costruire direttamente la soluzione per una distribuzione arbitraria di forze  $\mathbf{P}(x, y)$ . Più precisamente, se

$$u_i = G_{ik}(x, y, z) F_k \quad (8,13)$$

è la deformazione sotto l'effetto di una forza applicata nella origine, la deformazione risultante dalla forza  $\mathbf{P}(x, y)$  sarà definita dall'integrale<sup>1)</sup>

$$u_i = \iiint G_{ik}(x-x', y-y', z) P_k(x', y') dx' dy'. \quad (8,14)$$

È noto nella teoria del potenziale che una funzione armonica  $f$ , annullantesi all'infinito e che possiede una derivata normale data da  $\frac{\partial f}{\partial z}$  al piano  $z = 0$ , è data dalla formula

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{dx' dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Poiché le quantità  $\frac{\partial g_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial g_y}{\partial z}$  e la quantità entro parentesi graffe nella (8,10) soddisfano l'equazione di Laplace, e poiché le (8,10), (8,12) determinano proprio i valori delle loro derivate normali al piano  $z = 0$ , si ha

$$f_z = \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \iiint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_z}{r}, \quad (8,15)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_x}{r}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_y}{r}, \quad (8,16)$$

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Le espressioni delle componenti del vettore  $\mathbf{u}$  cercato contengono non le quantità  $g_x$  e  $g_y$  ma le loro derivate rispetto a  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Per calcolare  $\frac{\partial g_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g_y}{\partial y}$  deriviamo le uguaglianze (8,16) rispetto a  $x$  e  $y$ , rispettivamente. Si ha

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_{xx}}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y \partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_{yy}}{r^3}.$$

<sup>1)</sup> Secondo la terminologia matematica  $G_{ik}$  è il tensore di Green per le equazioni dell'equilibrio in un mezzo seminfinito.

Integrando su  $dz$  da  $\infty$  a  $z$ , si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_x}{\partial x} &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_{xx}}{r(r+z)}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial y} &= \frac{1+\sigma}{\pi E} \frac{F_{yy}}{r(r+z)}.\end{aligned}\quad (8,17)$$

Non proseguiremo oltre nei calcoli, semplici ma laboriosi. Si deduce  $f_z$  e  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$  dalle equazioni (8,11), (8,15) e (8,17). Noto  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ , è facile calcolare  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ , integrando dapprima su  $z$  e derivando quindi rispetto a  $x$  e  $y$ . Si ricavano così tutte le quantità necessarie per il calcolo del vettore deformazione dalle (8,2), (8,5), (8,7). Finalmente si ottiene

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)} \right] F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)} F_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \left\{ \left[ \frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z + \left[ \frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3} \right] (xF_x + yF_y) \right\}.\end{aligned}\quad (8,18)$$

In particolare, lo spostamento dei punti della superficie libera del mezzo si deduce dalle (8,18), ponendo  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)x}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_x + \frac{2\sigma x}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{(1-2\sigma)y}{r} F_z + 2(1-\sigma) F_y + \frac{2\sigma y}{r^2} (xF_x + yF_y) \right\}, \\ u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\sigma) F_z + (1-2\sigma) \frac{1}{r} (xF_x + yF_y) \right\}.\end{aligned}\quad (8,19)$$

### PROBLEMA

Determinare la deformazione di un mezzo elastico infinito sotto l'effetto di una forza localizzata  $F^1$ .

*Soluzione.* Considerando la deformazione a distanze  $r$  grandi rispetto alla dimensione della regione di applicazione della forza, possiamo pensare la forza come applicata in un punto. Si ha l'equazione di equilibrio (cfr. la (7,2))

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F}^1(r), \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Un problema analogo per un mezzo anisotropo infinito è stato risolto da I.M. Lifshits e L.N. Rosentsveig (ZETF 17, 783, 1947).

(dove  $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ , il punto di applicazione della forza è stato assunto come origine delle coordinate). Cerchiamo la soluzione nella forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ , dove  $\mathbf{u}_0$  è la soluzione dell'equazione di tipo Poisson.

$$\Delta \mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Per  $\mathbf{u}_1$  si ottiene allora l'equazione

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + (1-2\sigma) \Delta \mathbf{u}_1 = -\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_0. \quad (3)$$

La soluzione dell'equazione (2), che si annulla all'infinito è

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \frac{\mathbf{F}}{r}.$$

Applicando alla (3) l'operatore  $\operatorname{rot}$ , si ottiene  $\Delta \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$ . All'infinito si deve avere  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$ . Ora, una funzione armonica in tutto lo spazio e annullantesi all'infinito è una funzione identicamente nulla; dunque  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0$  e si potrà scrivere  $\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad} \varphi$ . Si deduce dalla (3)

$$\nabla \{2(1-\sigma) \Delta \varphi + \operatorname{div} \mathbf{u}_0\} = 0.$$

Ne discende che l'espressione entro parentesi è costante e poiché si annulla all'infinito, si ha in tutto lo spazio

$$\Delta \varphi = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_0}{2(1-\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)} \mathbf{F} \nabla \frac{1}{r}.$$

Se  $\varphi$  è soluzione dell'equazione  $\Delta \varphi = \frac{1}{r}$ ,

$$\varphi = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)} \mathbf{F} \nabla \psi.$$

Scegliendo la soluzione priva di singolarità  $\psi = \frac{r}{2}$ , si ottiene

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \varphi = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} \frac{(\mathbf{F} \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{F}}{r},$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore del raggio vettore  $\mathbf{r}$ . Finalmente

$$\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} \frac{(3-4\sigma) \mathbf{F} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})}{r}.$$

Scrivendo quest'ultima formula nella forma (8,13), si ottiene il tensore di Green delle equazioni dell'equilibrio di un mezzo isotropo infinito<sup>1)</sup>

$$G_{ik} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)} [(3-4\sigma) \delta_{ik} + n_i n_k] \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi \mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} r \right].$$

<sup>1)</sup> Il fatto che le componenti del tensore  $G_{ik}$  siano funzioni di primo grado delle coordinate  $x, y, z$ , è evidente a priori in base a considerazioni di omogeneità, relative alla forma dell'equazione (1) che contiene a primo membro una combinazione lineare di derivate seconde delle componenti di  $\mathbf{u}$ , a secondo membro una funzione omogenea di terzo grado ( $\delta(ar) = a^{-3}\delta(r)$ ). Questa proprietà sussiste nel caso generale di un mezzo anisotropo arbitrario.

### § 9. Contatto tra corpi solidi

Si considerino due corpi solidi a contatto in un punto non singolare delle loro superfici (nella fig. 1, a le due superfici sono rappresentate in sezione nelle vicinanze del punto di contatto 0). In questo punto le due superfici hanno lo stesso piano tangente, che assumeremo come piano  $x, y$ ; l'asse  $z$  sarà orientato diversamente per i due corpi, verso l'interno, e le corrispondenti coordinate saranno indicate con  $z$  e  $z'$ .

È noto che nelle vicinanze di un punto regolare (0) l'equazione della superficie, riferita al suo piano tangente (piano  $x, y$ ), può scriversi

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (9,1)$$

dove la somma sugli indici ripetuti va da 1 a 2 ( $x_1 = x, x_2 = y$ ),  $\kappa_{\alpha\beta}$  è un tensore simmetrico bidimensionale caratterizzante la curvatura della superficie (i suoi valori principali sono  $\frac{1}{2R_1}$  e  $\frac{1}{2R_2}$ , con  $R_1$  e  $R_2$  raggi di curvatura principali nel punto di contatto). Scriveremo analogamente per la superficie del secondo corpo, nelle vicinanze del punto di tangenza,

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \quad (9,2)$$

Supponiamo ora i corpi pressati l'uno contro l'altro e sia  $h$  l'avvicinamento, piccolo, che ne risulta<sup>1)</sup>.

Allora si realizza uno schiacciamento nelle vicinanze del primitivo punto di contatto talché il contatto non è più puntuale, ma avviene su una regione finita, seppure piccola, della superficie. Siano  $u_z$  e  $u'_z$  le componenti (rispettivamente sull'asse  $z$  e  $z'$ ) degli spostamenti dei punti delle superfici dei due corpi pressati. Nella fig. 1, b in tratteggiato sono rappresentate le superfici prima della deformazione;  $z$  e  $z'$  indicano le lunghezze definite rispettivamente dalle (9,1) e (9,2). Come si vede, in tutti i punti della regione di contatto si ha

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h$$

<sup>1)</sup> Il problema del contatto nella teoria dell'elasticità è stato studiato per la prima volta da H. Hertz.

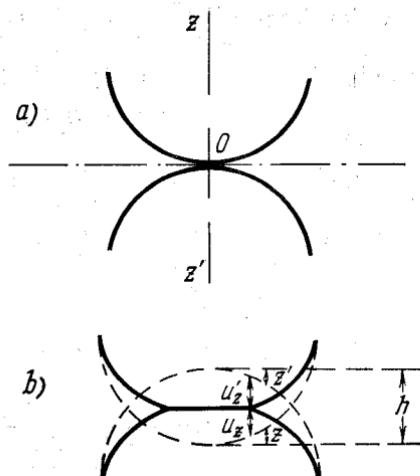


Fig. 1

ovvero

$$(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (9,3)$$

Nei punti esterni a questa regione, dove cessa di esercitarsi il contatto, si ha la diseguaglianza  $z + z' + u_z + u'_z < h$ .

Orientiamo gli assi  $x$  e  $y$  in modo tale che il tensore  $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$  sia ridotto ai suoi assi principali; indichiamo con  $A$  e  $B$  i valori principali corrispondenti<sup>1)</sup>. Allora la (9,3) si riscrive

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (9,4)$$

Indichiamo con  $P_z(x, y)$  la pressione tra i due corpi nei punti di contatto (ovviamente  $P_z = 0$  al di fuori della regione di contatto). Nel determinare il legame tra  $P_z$  e gli spostamenti  $u_z$  e  $u'_z$ , si potrà con sufficiente precisione considerare le superfici come piane e quindi utilizzare le formule trovate nel precedente paragrafo. Allora dalla (8,19) (e facendo uso anche della (8,14)), lo spostamento  $u_z$  sotto l'effetto della forza normale  $P_z(x, y)$  è determinato dalle

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy', \\ u'_z &= \frac{1-\sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (9,5)$$

( $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $E$  e  $E'$  sono rispettivamente i coefficienti di Poisson e i moduli di trazione dei due corpi); poiché  $P_z = 0$  fuori della regione di contatto, il dominio di integrazione è esteso a tale regione. Osserviamo che dalle formule sopra scritte discende la costanza di  $\frac{u_z}{u'_z}$ :

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1-\sigma^2) E'}{(1-\sigma'^2) E}. \quad (9,6)$$

<sup>1)</sup>  $A$  e  $B$  sono correlati ai raggi di curvatura  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R'_1$ ,  $R'_2$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 2(A+B) &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}, \\ 4(A-B)^2 &= \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + \\ &\quad + 2 \cos 2\varphi \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right), \end{aligned}$$

ove  $\varphi$  è l'angolo tra le sezioni normali, corrispondenti ai raggi di curvatura  $R_1$ ,  $R'_1$ .

I raggi sono presi positivi quando i centri di curvatura sono interni ai corpi, negativi nel caso opposto.

Le relazioni (9,4) e (9,6) determinano insieme la distribuzione della deformazione  $u_z$  e  $u'_z$  nella regione di contatto (ovviamente le formule (9,5) e (9,6) estendono la loro validità anche ai punti esterni a tale regione).

Sostituendo le (9,5) nella (9,4), segue

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \int \int \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (9,7)$$

Questa equazione integrale determina la distribuzione della pressione  $P_z$  nella regione di contatto. Si può determinare la soluzione del problema analogicamente, utilizzando le relazioni qui appresso riportate, note dalla teoria del potenziale. Una duplice osservazione induce questa analogia. Primo, l'integrale a primo membro della (9,7) è del tipo di quelli che si presentano nella teoria del potenziale e che determinano il potenziale creato da un'assegnata distribuzione di cariche; secondo, il potenziale del campo in un ellissoide uniformemente carico è una funzione quadratica delle coordinate.

Quando un ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è uniformemente carico nel suo volume con densità costante  $\rho$ , il potenziale del campo nell'ellissoide stesso è dato dalla

$$\varphi(x, y, z) = \pi \rho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \times \\ \times \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}}.$$

Nel caso limite di un ellissoide appiattito (lungo  $z$ ), e cioè nel caso  $c \rightarrow 0$ , se ne ricava

$$\varphi(x, y) = \pi \rho abc \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}$$

(quando si passa al limite per  $c \rightarrow 0$ , ovviamente bisogna nel contempo annullare la coordinata  $z$  dei punti dell'ellissoide). Peraltro, il potenziale può scriversi

$$\varphi(x, y, z) = \int \int \int \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

dove l'integrale è esteso al volume dell'ellissoide. Anche qui, passando al limite per  $c \rightarrow 0$ , si dovrà porre nel radicale  $z = z' = 0$ .

Integrando in  $dz'$  tra i limiti  $\pm c \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$ , si ha

$$\varphi(x, y) = 2\rho c \iint \frac{dx' dy'}{|r|} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \\ (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}).$$

L'integrale è esteso al dominio assegnato dall'ellisse  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ .

Uguagliando le due espressioni di  $\varphi(x, y)$ , si ottiene l'identità

$$\iint \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \times \\ \times \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \quad (9,8)$$

Confrontando questa relazione con l'equazione (9,7) si vede che i secondi membri hanno la stessa dipendenza quadratica di  $x$  e  $y$  e che nei primi membri figurano integrali dello stesso tipo. Se ne conclude che il dominio di contatto dei due corpi (cioè il dominio di integrazione nella (9,7)) è delimitato da un'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9,9)$$

e che la funzione  $P_z(x, y)$  è del tipo

$$P_z(x, y) = \text{cost.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Scegliendo la costante in modo tale che l'integrale  $\iint P_z dx dy$  esteso al dominio di contatto sia uguale alla forza totale  $F$  con cui i due corpi interagiscono, si ha

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (9,10)$$

Questa formula definisce la legge di distribuzione della pressione nel dominio di contatto. Osserviamo che nel centro del dominio la pressione è una volta e mezza più grande della pressione media  $F/\pi ab$ .

Sostituendo la (9,10) nella (9,7) e mettendo al posto dell'integrale ottenuto la sua espressione (9,8), si ha

$$\frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

dove

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right).$$

Questa uguaglianza deve essere soddisfatta identicamente in  $x$  e  $y$  (nell'ellisse (9,9)); ne consegue l'uguaglianza dei coefficienti di  $x$  e  $y$  e delle costanti che figurano nei due membri. Si ha così

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \quad (9,11)$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi) \sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \quad (9,12)$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2+\xi) \sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}.$$

Le equazioni (9,12) determinano i semiassi  $a$  e  $b$  del dominio di contatto in funzione della forza  $F$  ( $A$  e  $B$  sono note come caratteristiche dei corpi in oggetto). Dopo di ciò, la relazione (9,11) determina il legame tra  $F$  e l'avvicinamento  $h$  che essa provoca. Nei secondi membri di queste equazioni figurano integrali ellittici.

Così il problema del contatto tra i corpi può considerarsi risolto. La forma della superficie dei corpi (cioè gli spostamenti  $u_z$  e  $u'_z$ ) al di fuori del dominio di contatto è data dalle stesse formule (9,5) e (9,10); i valori degli integrali possono essere trovati ricorrendo ancora all'analogia con il problema del potenziale del campo, di un ellissoide carico, questa volta al di fuori dell'ellissoide stesso. Infine, le formule del paragrafo precedente permettono anche di trovare la distribuzione della deformazione nel volume dei corpi (ma soltanto su distanze piccole rispetto alle dimensioni del corpo).

Applichiamo le formule trovate al contatto tra due sfere di raggi  $R$  ed  $R'$ . Si ha in questo caso  $A = B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ ; per motivi di simmetria è chiaro che deve essere  $a = b$ , cioè il dominio di contatto è un cerchio. Dalla (9,12) segue per il raggio  $a$  di tale cerchio

$$a = F^{1/3} \left( D \frac{RR'}{R+R'} \right)^{1/3}, \quad (9,13)$$

$h$  essendo ora la differenza tra  $R + R'$  e la distanza tra i centri delle sfere. Dalla (9,10) segue la relazione tra  $F$  ed  $h$ :

$$h = F^{2/3} \left[ D^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]^{1/3}. \quad (9,14)$$

Notiamo che l'avvicinamento è proporzionale a  $F^{2/3}$ ; viceversa, la forza di pressione  $F$  è proporzionale ad  $h^{3/2}$ . Scriviamo l'energia potenziale  $U$  delle sfere a contatto. Notando che  $(-F) = -\frac{\partial U}{\partial h}$ , si ha

$$U = h^{5/2} \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}. \quad (9,15)$$

Infine rileviamo che la legge

$$h = \text{cost} \cdot F^{2/3}, \quad F = \text{cost} \cdot h^{3/2}$$

si estende anche al caso di corpi, in contatto su regioni finite, non necessariamente sferici, come si può vedere in base a considerazioni di similitudine. Nella sostituzione  $a^2 \rightarrow \alpha a^2$ ,  $b^2 \rightarrow \alpha b^2$ ,  $F \rightarrow \alpha^{3/2} F$ , con  $\alpha$  costante arbitraria, le equazioni (9,12) restano invariate. L'equazione (9,11) ha il secondo membro moltiplicato per  $\alpha$ , e affinché resti invariata occorre sostituire  $h$  con  $\alpha h$ . Ne segue per  $F$ :

$$F \propto h^{3/2}.$$

### P R O B L E M I

- Determinare la durata di collisione di due sfere elastiche.

*Soluzione.* Nel riferimento di quiete del baricentro del sistema, l'energia delle due sfere prima della collisione è uguale all'energia cinetica del moto relativo  $\frac{\mu v^2}{2}$ , dove  $v$  è la velocità relativa e  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  è la massa ridotta. Durante la collisione l'energia totale è la somma dell'energia cinetica, che si può scrivere come  $\frac{\mu h^2}{2}$ , e dell'energia potenziale (9,15). Dalla legge di conservazione dell'energia segue

$$\mu \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}.$$

L'avvicinamento massimo  $h_0$  delle sfere, che avviene quando la loro velocità relativa si annulla, è

$$h_0 = \left( \frac{\mu}{k} \right)^{2/5} v^{4/5}.$$

La durata del tempo di collisione ( $h$  varia tra 0 e  $h_0$ , quindi da  $h_0$  a 0) è

$$\tau = 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{k}{\mu} h^{5/2}}} = 2 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2/5}}},$$

ovvero

$$\tau = \frac{4 \sqrt{\pi} \Gamma(2/5)}{5 \Gamma(9/10)} \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5} = 2,94 \left( \frac{\mu^2}{k^2 v} \right)^{1/5}.$$

Il problema è stato risolto utilizzando le formule statiche dedotte nel testo, e quindi facendo astrazione dalle oscillazioni elastiche della sfera che sorgono a seguito della collisione. Questa astrazione è valida fintanto che  $v$  è sufficientemente piccola rispetto alla velocità del suono. Ma in realtà tutta la teoria cade in difetto molto prima, allorché le deformazioni dovute alle collisioni superano il limite di elasticità della sostanza.

2. Trovare le dimensioni del dominio di contatto e la distribuzione della pressione in questo dominio, nel caso di due cilindri pressati l'uno contro l'altro, lungo una generatrice comune.

*Soluzione.* Il dominio di contatto è qui costituito da una striscia sottile avente per asse la generatrice. La larghezza di questa striscia,  $2a$ , e la distribuzione della pressione possono essere dedotte dalle formule del testo, passando al limite per  $b/a \rightarrow \infty$ . La distribuzione della pressione sarà una funzione del tipo

$$P_z(x) = \text{cost.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

( $x$  è la coordinata trasversale della striscia di contatto); normalizzandola sulla forza di pressione  $F$  riportata all'unità di lunghezza dei cilindri, si ha

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Sostituendo nella (9,7) e integrando per il tramite della (9,8), segue:

$$A = \frac{4DF}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^{3/2} \xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Uno dei raggi di curvatura di una superficie cilindrica è infinito, l'altro coincide col suo raggio; pertanto si ha

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad B = 0.$$

La larghezza della striscia di contatto è così determinata

$$a = \sqrt{\frac{16DF}{3\pi} \frac{RR'}{R+R'}}.$$

### § 10. Proprietà elastiche dei cristalli

La variazione dell'energia libera di un cristallo in una compressione isoterma è, come nel caso dei corpi isotropi, una funzione quadratica del tensore di deformazione. Ma nel caso dei cristalli questa funzione contiene un numero di coefficienti indipendenti superiore a due. L'espressione generale dell'energia libera di un cristallo deformato è

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} u_{ik} u_{jl}, \quad (10,1)$$

$\lambda_{iklm}$  è un tensore del quarto ordine, detto *tensore dei moduli di elasticità*. Essendo simmetrico il tensore di deformazione,  $u_{ik}u_{lm}$  resta invariato per permutazioni  $i$  e  $k$ ,  $l$  ed  $m$ , ovvero ( $i, k$ ) e ( $l, m$ ). Allora, evidentemente, si può definire il tensore  $\lambda_{iklm}$  in modo tale che goda di queste proprietà di simmetria:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (10,2)$$

Un calcolo semplice mostra che il numero delle componenti distinte di un siffatto tensore del quarto ordine è, nel caso generale, pari a 21.

A partire dall'espressione (10,1) dell'energia libera, il tensore degli sforzi si esprime, nel caso dei cristalli, in funzione del tensore di deformazione (vedi nota pag. 57)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm} u_{lm}. \quad (10,3)$$

La presenza di simmetrie in un cristallo incrementa il numero delle relazioni tra le diverse componenti del tensore  $\lambda_{iklm}$ , diminuendo corrispondentemente il numero di quelle indipendenti. Consideriamo ora queste relazioni in corrispondenza a tutti i tipi di simmetrie macroscopiche dei cristalli, cioè per tutte le classi cristalline, ripartendole in sistemi cristallini adeguati.

1. **Sistema triclinico.** La simmetria triclinica (classi **C**<sub>1</sub> e **C**<sub>i</sub>) non impone alcuna restrizione alle componenti di  $\lambda_{iklm}$  e la scelta del sistema di coordinate è, per quanto concerne la simmetria, del tutto arbitraria. Tutti i 21 moduli di elasticità sono non nulli e indipendenti. Peraltro, l'arbitrarietà della scelta delle coordinate permette di imporre ulteriori condizioni su  $\lambda_{iklm}$ . Infatti, poiché l'orientazione di un sistema d'asse rispetto ad un corpo è determinata da tre parametri (gli angoli di rotazione), corrispondentemente le condizioni sono in numero di tre, per esempio si può imporre che siano nulle tre delle 21 componenti. In questo modo le quantità che caratterizzano le proprietà del cristallo sono i 18 moduli non nulli ed i 3 angoli che assegnano il sistema di riferimento.

2. **Sistema monoclinico.** Consideriamo la classe **C**<sub>s</sub>; prendiamo come piano coordinato  $x, y$  il piano di simmetria. In una riflessione rispetto a tale piano le coordinate subiscono la trasformazione  $x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$ . Ricordando che le componenti del tensore si trasformano come il prodotto delle coordinate corrispondenti, risulta chiaro che tutte le componenti  $\lambda_{iklm}$  contenenti un numero dispari (1 o 3) di volte l'indice  $z$  cambiano segno, mentre le altre sono invariate. Ne discende che sono nulle tutte le componenti in cui figura un numero dispari di volte l'indice  $z$ . In definitiva l'espressione generale dell'energia elastica libera in un cri-

stallo monoclinico si scrive

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \\
 & + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz} u_{xz}^2 + \\
 & + 2\lambda_{yzyz} u_{yz}^2 + 2\lambda_{xxxx} u_{xx} u_{xy} + 2\lambda_{yyyy} u_{yy} u_{yx} + \\
 & + 2\lambda_{xyzz} u_{xy} u_{zz} + 4\lambda_{xzyz} u_{xz} u_{yz}.
 \end{aligned} \tag{10,4}$$

Vi sono 13 coefficienti indipendenti. Analoga espressione si ricava per la classe  $C_2$  e  $C_{2h}$ , che contiene simultaneamente i due elementi di simmetria ( $C_2$  e  $\sigma_h$ ). In quanto precede, peraltro, le condizioni di simmetria fissano un solo asse coordinato, l'asse  $z$ , mentre gli assi  $x$  ed  $y$  sono indeterminati. Con un'opportuna scelta di orientamento si può fare in modo allora di annullare una delle componenti, per esempio  $\lambda_{xyzz}$ . In definitiva abbiamo 13 quantità che caratterizzano le proprietà elastiche del cristallo, e cioè 12 moduli non nulli e l'angolo che fissa l'orientamento degli assi del piano  $x$ ,  $y$ .

3. S i s t e m a o r t o r o m b i c o . In tutte le classi di questo sistema ( $C_{2v}$ ,  $D_2$ ,  $D_{2h}$ ), la scelta degli assi coordinati è determinata univocamente dalla simmetria e si ottiene la stessa espressione per l'energia libera. Soffermiamoci, per esempio, sulla classe  $D_{2h}$ ; assumiamo come piani coordinati i tre piani di simmetria di questa classe. Le riflessioni in ciascuno di tali piani hanno per effetto di cambiare il segno di una delle coordinate, lasciando invariate le altre due. Allora è evidente che le sole componenti  $\lambda_{iklm}$  che sussistono sono quelle in cui ciascuno degli indici  $x$ ,  $y$ ,  $z$  appare un numero pari di volte; infatti, qualunque altra componente cambia di segno nella riflessione rispetto ad un piano di simmetria. Pertanto l'energia libera del sistema ortorombico ha la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{yyyy} u_{yy}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + \\
 & + \lambda_{xxzz} u_{xx} u_{zz} + \lambda_{yyzz} u_{yy} u_{zz} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^2 + \\
 & + 2\lambda_{xzxz} u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz} u_{yz}^2.
 \end{aligned} \tag{10,5}$$

In tutto vi sono 9 moduli di elasticità.

4. S i s t e m a t e t r a g o n a l e . Consideriamo la classe  $C_{4v}$ . Prendiamo come asse  $z$   $C_4$ , gli assi  $x$  e  $y$  perpendicolari a due piani di simmetria verticali. Le riflessioni in questi due piani si traducono rispettivamente nelle trasformazioni  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow z$  e  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ ; allora tutte le componenti  $\lambda_{iklm}$  con un numero dispari di indici identici sono nulle. D'altra parte, una rotazione di  $\frac{\pi}{4}$  attorno all'asse  $C_4$  è rappresentata da  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow -x$ ,  $z \rightarrow z$ . Ne consegue

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}.$$

Le altre trasformazioni di  $C_{4v}$  non aggiungono altre condizioni, l'energia libera dei cristalli del sistema tetragonale è pertanto

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^{21} + \lambda_{xxzz} (u_{xx} u_{zz} + u_{yy} u_{zz}) + \\ + \lambda_{xxyy} u_{xx} u_{yy} + 2\lambda_{xyxy} u_{xy}^{21} + 2\lambda_{xzxz} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,6)$$

Vi sono in tutto 6 moduli di elasticità.

Un risultato analogo si ha per le altre classi del sistema tetragonale, naturalmente il sistema di coordinate essendo scelto in accordo con la corrispondente simmetria ( $D_{2d}$ ,  $D_4$ ,  $D_{4h}$ ). Per le classi  $C_4$ ,  $S_4$ ,  $C_{4h}$  solo l'asse  $z$  è fissato, come  $C_4$  o  $S_4$ . Quindi sussistono ancora le componenti (oltre a quelle che figurano nella (10,6))

$$\lambda_{xxyy} = -\lambda_{yyxy}.$$

Una scelta adeguata degli assi  $x$ ,  $y$  le annulla, ed  $F$  è ricondotta alla forma (10,6).

**Sistema romboedrico.** Consideriamo la classe  $C_{3v}$ ; l'asse  $z$  viene allora allineato con l'asse del terzo ordine, l'asse  $y$  è perpendicolare ad uno dei piani di simmetria verticale. Per dedurre le restrizioni imposte alle componenti del tensore  $\lambda_{ihlm}$  dalla presenza dell'asse  $C_3$  è comodo passare dalle coordinate  $x$ ,  $y$  alle « coordinate » complesse  $\xi$  e  $\eta$ , definite dalle relazioni

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy,$$

mentre la coordinata  $z$  resta immutata. Scriveremo così in queste nuove « coordinate » il tensore  $\lambda_{ihlm}$ , dove gli indici prendono ora i valori  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$ . È facile vedere che in una rotazione di  $120^\circ$  attorno a  $C_3$  le « coordinate » subiscono la trasformazione

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \quad z \rightarrow z.$$

In virtù della simmetria del cristallo, possono essere non nulle quelle componenti  $\lambda_{ihlm}$  che restano immutate in tale trasformazione. Tali componenti sono quelle che hanno tra i loro indici 3 volte  $\xi$  o  $\eta$

(poiché  $(e^{\frac{2\pi i}{3}})^3 = e^{2\pi i} = 1$ ), o che contengono altrettante volte  $\xi$  ed  $\eta$  (poiché  $e^{\frac{2\pi i}{3}} e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 1$ ); esplicitando

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\eta\xi\xi\xi}.$$

D'altra parte, la riflessione in un piano di simmetria perpendicolare all'asse delle  $y$  è data dalla trasformazione  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ , ovvero per le  $\xi$  e  $\eta$ :  $\xi \rightarrow \eta$ ,  $\eta \rightarrow \xi$ . Poiché allora  $\lambda_{\xi\xi\xi\xi}$  si trasforma in  $\lambda_{\eta\xi\xi\xi}$ , queste due componenti debbono coincidere. Così i cristalli

del sistema romboedrico hanno in tutto 6 moduli di elasticità. Per scrivere l'espressione dell'energia libera, bisogna formare la somma  $\frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$ , in cui gli indici prendono i valori  $\xi, \eta, z$ ; poiché ci serve  $F$  espressa per il tramite delle componenti del tensore di deformazione in coordinate  $x, y, z$ , bisognerà esprimere  $u_{ik}$  scritte nelle « coordinate »  $\xi, \eta, z$ , per il tramite delle omologhe, scritte nelle coordinate  $x, y, z$ . Si può fare ciò semplicemente, partendo dal fatto che le componenti  $u_{ik}$  si trasformano come i prodotti delle due coordinate corrispondenti. Per esempio da

$$\xi\xi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

segue

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

Si trova finalmente per  $F$

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ & + 2\lambda_{\xi\eta z} (u_{xx} + u_{yy}) u_{zz} + 4\lambda_{\xi z \eta z} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ & + 4\lambda_{\xi\xi\xi z} [(u_{xx} - u_{yy}) u_{xz} - 2u_{xy} u_{yz}]. \end{aligned} \quad (10,7)$$

$F$  contiene 6 coefficienti indipendenti. Questo risultato vale per le classi  $D_3$  e  $D_{3d}$ . Per le classi  $C_3$  e  $S_6$ , in cui la scelta degli assi  $x$  ed  $y$  è arbitraria, le esigenze dovute alla simmetria consentono che

$$\lambda_{\xi\xi\xi z} \neq \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Tuttavia, un'opportuna scelta degli assi conduce a  $\lambda_{\xi\xi\xi z} = \lambda_{\eta\eta\eta z}$ <sup>1)</sup>.

6. S i s t e m a e s a g o n a l e. Consideriamo la classe  $C_6$  e sia l'asse  $z$  diretto lungo l'asse del sesto ordine. Nuovamente facciamo uso delle « coordinate »  $\xi = (x + iy)$ ,  $\eta = (x - iy)$ . In una rotazione di  $\frac{2\pi}{6}$  attorno all'asse  $z$ , le coordinate  $\xi$  e  $\eta$  divengono

$$\xi \rightarrow \xi e^{\frac{2\pi i}{6}}, \quad \eta \rightarrow \eta e^{-\frac{2\pi i}{6}}.$$

<sup>1)</sup> A scanso di equivoci prestiamo attenzione al fatto che nella trasformazione lineare arbitraria (non ortogonale) delle coordinate si deve scrivere lo scalare (10,1) nella forma  $F = \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}/2$  facendo distinzione tra componenti contro- e covarianti dei tensori (le prime si trasformano come le stesse coordinate  $x^i$  e le seconde come derivate  $\partial/\partial x^i$ ). Nelle espressioni (10,7) e (10,8) le componenti del tensore di deformazione sono trasformate come controvarianti; pertanto per stabilire il legame tra le componenti  $\lambda_{iklm}$  nelle coordinate  $\xi, \eta, z$  e  $x, y, z$  bisogna considerarle come covarianti; in coordinate cartesiane  $x, y, z$  le componenti co- e controvariante dei tensori naturalmente coincidono (cfr. problema del § 23).

Questo mostra che le sole componenti non nulle  $\lambda_{ijklm}$  sono quelle che contengono gli indici  $\xi$  ed  $\eta$  un numero uguale di volte; tali sono

$$\lambda_{zzzz}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}, \lambda_{\xi\xi\xi\xi}.$$

Gli altri elementi di simmetria possibili del sistema esagonale non impongono alcuna restrizione. In tutto si hanno 5 moduli di elasticità. L'energia libera ha la forma

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{zzzz} u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\xi\xi\xi} (u_{xx} + u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\xi\xi} [(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\xi\xi\xi} u_{zz} (u_{xx} + u_{yy}) + 4\lambda_{\xi\xi\xi\xi} (u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,8)$$

Bisogna notare che la deformazione nel piano  $x, y$  (deformazione di componenti  $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$  non nulle) è determinata da due moduli di elasticità, proprio come nel caso di un corpo isotropo; detto in altri termini, in un piano perpendicolare all'asse esagonale il cristallo è isotropo.

In conseguenza di ciò, la scelta della direzione degli assi in questo piano è irrilevante, per quel che concerne la forma di  $F$ . L'espressione (10,8) si estende di conseguenza a tutte le classi del sistema esagonale.

7. S i s t e m a c u b i c o. Gli assi  $x, y, z$ , sono diretti lungo gli assi del quarto ordine del sistema cubico. Già la presenza della simmetria tetragonale (asse del quarto ordine lungo  $z$ ) riduce il numero delle componenti indipendenti  $\lambda_{ijklm}$  alle 6 seguenti<sup>1</sup>):

$$\lambda_{xxxx}, \lambda_{zzzz}, \lambda_{xxzz}, \lambda_{xxyy}, \lambda_{xyxy}, \lambda_{xzxz}.$$

Le rotazioni di  $90^\circ$  attorno agli assi  $x$  ed  $y$  danno rispettivamente le trasformazioni  $x \rightarrow x, y \rightarrow -z, z \rightarrow y$  e  $x \rightarrow z, y \rightarrow y, z \rightarrow -x$ . Queste trasformazioni comportano l'uguaglianza delle prime due componenti sopra scritte così come delle ultime due, talché il numero totale di moduli di elasticità indipendenti è ridotto a 3. Per l'energia libera dei cristalli del sistema cubico si ha

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy} (u_{xx} u_{yy} + \\ + u_{xx} u_{zz} + u_{yy} u_{zz}) + 2\lambda_{xyxy} (u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10,9)$$

Riportiamo una tabella in cui figura il numero dei parametri indipendenti (moduli di elasticità o angoli determinanti l'orientamento degli assi del cristallo) per le classi dei diversi sistemi:

<sup>1)</sup> Le classi cubiche  $T$  e  $T_d$  non hanno assi del quarto ordine. Lo stesso risultato si ottiene però, in questi casi, considerando gli assi del terzo ordine, le rotazioni attorno ai quali trasformano l'uno nell'altro gli assi del secondo ordine  $x, y, z$ .

triclino . . . . .	21
monoclino . . . . .	13
ortorombico . . . . .	9
tetragonale $(C_4, S_4, C_{4h})$ . . . . .	7
tetragonale $(C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h})$ . . . . .	6
romboedrico $(C_3, S_6)$ . . . . .	7
romboedrico $(C_{3v}, D_3, D_{3d})$ . . . . .	6
esagonale . . . . .	5
cubico . . . . .	3

Il numero minimo dei moduli non nulli (uguali per tutte le classi di uno stesso sistema), a cui ci si può ridurre con un'opportuna scelta degli assi è

triclino . . . . .	18
monoclino . . . . .	12
ortorombico . . . . .	9
tetragonale . . . . .	6
romboedrico . . . . .	6
esagonale . . . . .	5
cubico . . . . .	3

Ovviamente, quanto detto ha validità ristretta ai monocrystalli. I corpi policristallini, con dimensioni abbastanza piccole dei cristalliti da cui sono costituiti, possono essere considerati isotropi (limitandoci a considerare deformazioni su regioni grandi rispetto alle dimensioni dei cristalliti). Come ogni corpo isotropo, un policristallo è caratterizzato da due moduli di elasticità. Si sarebbe portati a credere in prima istanza che questi moduli possano essere dedotti mediando i moduli di elasticità dei diversi cristalliti, ma non è così. Se si considera che la deformazione del policristallo risulta da quella dei cristalliti costituenti, conseguentemente si dovrebbe, almeno in linea di principio, risolvere le equazioni dell'equilibrio per tutti i cristalliti, tenendo in conto le condizioni ai limiti sulle superfici di separazione. Si vede così che il legame tra le proprietà elastiche del cristallo nel suo insieme e quelle dei cristalliti costituenti dipende dalla forma specifica di questi e dalle correlazioni tra i mutui orientamenti. Così, non esiste legame tra i moduli di elasticità di un policristallo e di un monocristallo (della stessa materia).

Il calcolo dei moduli di un policristallo isotropo in funzione dei moduli monocrystallini non può essere fatto con precisione apprezzabile, a meno che le proprietà del monocristallo non siano debolmente anisotropo<sup>1)</sup>. In prima approssimazione si possono porre i moduli di elasticità del policristallo semplicemente uguali alla « parte isotropa » dei moduli elastici del monocristallo. Allora, all'approssimazione successiva appaiono termini quadratici nella « piccola parte anisotropa » di questi moduli. Questi termini cor-

<sup>1)</sup> Così nel cristallo cubico « debolmente anisotropo »  $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} - 2\lambda_{xyxy}$  deve essere piccolo.

rettivi risultano indipendenti dalla forma dei cristalliti e dalla correlazione delle loro orientazioni e possono essere calcolati nella forma generale<sup>1).</sup>

Trattiamo da ultimo la dilatazione termica dei cristalli. Nei corpi isotropi questa è uguale in tutte le direzioni, talché il tensore di deformazione si scrive, nel caso di deformazione termica libera,

$$u_{ik} = \frac{1}{3} \alpha (T - T_0) \delta_{ik}$$

(cfr. § 6), con  $\alpha$  coefficiente di dilatazione termica. Nel caso dei cristalli si avrà

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3} (T - T_0), \quad (10,10)$$

$\alpha_{ik}$  essendo un tensore del secondo ordine, simmetrico rispetto agli indici  $i, k$ . Determiniamo il numero delle componenti indipendenti nei cristalli delle diverse classi. A tal fine conviene partire dal fatto, noto in algebra tensoriale, che ad ogni tensore simmetrico si può far corrispondere un ellissoide (di equazione  $\alpha_{ik}x_i x_k = 1$ ). Da considerazioni di simmetria discende che questo ellissoide ha, in generale, tre assi (le lunghezze dei tre assi sono differenti) per le simmetrie tricline, monocline e ortorombiche. Per le simmetrie tetragonale, romboedrica e esagonale, questo ellissoide deve essere di rivoluzione (avente come asse quello di simmetria di  $C_4$ ,  $C_3$  o  $C_6$ ). Infine l'ellissoide degenera in una sfera nel caso della simmetria cubica. Nei tre casi considerati, gli ellissoidi sono rispettivamente definiti da tre parametri (i 3 assi), da due e da uno (il raggio). In tal modo il numero delle componenti indipendenti del tensore  $\alpha_{ik}$  nei cristalli di differente simmetria è

triclinico, monoclinico, ortorombico	3
tetragonale, romboedrico, esagonale	2
cubico	1

I cristalli dei primi tre sistemi sono detti biassiali, quelli degli altri tre successivi monoassiali. Osserviamo che la dilatazione termica dei cristalli del sistema cubico è definita da un solo parametro, cioè per questo aspetto essi sono isotropi.

### P R O B L E M A

Determinare il legame tra il modulo di trazione di un cristallo cubico e la direzione.

*Soluzione.* Riferiamo il sistema di coordinate ai tre assi del quarto ordine del cristallo cubico. Supponiamo l'asse della sbarra intagliata nel cristallo diretta lungo il vettore unitario  $n$ . Il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}$  nella sbarra tesa deve soddisfare le seguenti condizioni: moltiplicato per  $n_i$  deve fornire la forza di trazione lungo  $n$  (condizioni sulle basi della sbarra); moltiplicato per un vettore

<sup>1)</sup> I. M. Lifšits, L. N. Rosentsev, ŽETF 16, 967 (1946).

tore perpendicolare ad  $\mathbf{n}$  deve annullarsi (condizione sulla superficie laterale della sbarra). Un tale tensore si scrive nella forma  $\sigma_{ik} = pn_i n_k$ ,  $p$  essendo la forza di trazione che si esercita sull'unità di superficie della base. Calcolando le componenti di  $\sigma_{ik}$  per mezzo dell'espressione (10,9) dell'energia libera<sup>1)</sup> e confrontandole con  $\sigma_{ik} = pn_i n_k$ , si ottengono le componenti del tensore di deformazione

$$u_{xx} = p \frac{(c_1 + 2c_2) n_x^2 - c_2}{(c_1 - c_2)(c_1 + 2c_2)}, \quad u_{xy} = p \frac{n_x n_y}{2c_3}$$

e analogamente per le restanti  $u_{ih}$ ; si sono adottate le notazioni  $\lambda_{xxxx} = c_1$ ,  $\lambda_{xxyy} = c_2$ ,  $\lambda_{xyxy} = c_3$ .

L'allungamento longitudinale relativo è  $u = \frac{dl' - dl}{dl}$ ,  $dl'$  essendo definito dalla (1,2) e  $\frac{dx_i}{dl} = n_i$ . Di qui, per piccole deformazioni, si ha  $u = u_{ih} n_i n_k$ . Il modulo di Young è definito come il coefficiente di proporzionalità tra  $p$  ed  $u$  nella relazione  $p = Eu$  e vale

$$\frac{1}{E} = \frac{c_1 + c_2}{(c_1 + 2c_2)(c_1 - c_2)} + \left( \frac{1}{c_3} - \frac{2}{c_1 - c_2} \right) (n_x^2 n_y^2 + n_x^2 n_z^2 + n_y^2 n_z^2).$$

$E$  assume valori estremi lungo gli spigoli (assi delle coordinate) e lungo le diagonali maggiori del cubo.

<sup>1)</sup> Calcolando  $\sigma_{ik}$  bisogna osservare che se si eseguono i calcoli non direttamente, dalle  $\sigma_{ik} = \lambda_{ikhlm} u_{lm}$ , ma derivando l'espressione esplicita dell'energia libera rispetto alle componenti  $u_{ik}$ , le derivate rispetto ai termini  $u_{ih}$ ,  $i \neq k$ , danno il doppio dei corrispondenti valori  $\sigma_{ik}$ . Ciò deriva dal fatto

che i termini  $\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$  sono i coefficienti nella forma differenziale  $dF = \sigma_{ik} du_{ik}$  e i termini proporzionali a  $du_{ik}$ , differenziali delle componenti del tensore simmetrico  $u_{ik}$ ,  $i \neq k$ , figurano due volte nella somma  $\sigma_{ik} du_{ik}$ .

## Capitolo II

### EQUILIBRIO DI SBARRE E LAMINE

#### § 11. Energia di flessione di una lamina

In questo capitolo studieremo alcuni casi particolari dell'equilibrio dei corpi deformati, iniziando con l'esame delle deformazioni delle lame sottili. Col termine « lamina sottile », intendiamo riferirci a corpi in cui lo spessore è trascurabile rispetto alle altre due dimensioni. Le deformazioni continuano ad essere supposte piccole, nel senso che i punti della lamina variano di poco rispetto allo spessore.

Le equazioni generali dell'equilibrio applicate alle lame sottili si semplificano considerevolmente. Tuttavia, piuttosto che operare in questo senso, cioè dedurre tali equazioni a partire dal caso generale, si preferisce calcolare direttamente l'energia libera della lamina flessa e quindi la variazione di detta energia.

Quando una lamina si flette, al suo interno si sviluppano in certi punti delle tensioni, in altri delle compressioni. Evidentemente c'è tensione nella parte convessa, e via via che si penetra nell'interno questa tensione diminuisce progressivamente per annullarsi e dare quindi luogo ad una compressione che va aumentando negli strati successivi. In questo modo, si ha entro la lamina una *superficie neutra*, su cui la tensione è nulla, le deformazioni dall'altra parte di questa superficie sono di segno opposto. È evidente che tale superficie è il luogo mediano dello spessore della lamina.

Sceglieremo un sistema di coordinate con origine in un punto qualunque sulla superficie neutra, asse  $z$  normale a tale superficie; il piano  $x, y$  coincide con il piano non deformato della lamina. Indichiamo con  $\zeta$  lo spostamento verticale dei punti della superficie neutra, cioè la loro coordinata  $z$  (fig. 2). Per quel che concerne le componenti dello spostamento di questi punti sul piano  $x, y$ , queste sono infinitesimi di ordine superiore a  $\zeta$ , e saranno trascurati. Il vettore spostamento dei punti della superficie neutra è dunque

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \quad (11,1)$$

Per procedere oltre, occorre rilevare un fatto a proposito degli sforzi in una lamina deformata. Dacché la lamina è sottile, per curvarla basterà applicare alla sua superficie forze relativamente deboli.

Queste saranno certamente più deboli degli sforzi che insorgono nella lamina a seguito delle tensioni e delle compressioni; di conseguenza si potranno trascurare le forze  $P_i$  nelle condizioni ai limiti

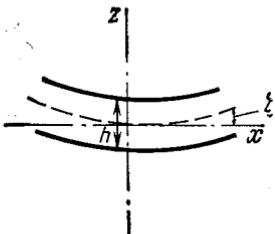


Fig. 2

(2,8) e quindi porre ivi  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Poiché la lamina è curvata di poco, si può assumere la normale diretta lungo l'asse z. Allora sulle due superfici della lamina si ha

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Ma la lamina è sottile, quindi l'annullarsi di queste quantità sulle due facce comporta che nell'interno esse siano piccole. Cioè  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  sono piccole ovunque rispetto alle rimanenti componenti del tensore degli sforzi. Ponendole uguali a zero, si possono determinare di conseguenza le componenti del tensore di deformazione.

In virtù delle formule generali (5,13)

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zx}, & \sigma_{zy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{zy}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma (u_{xx} + u_{yy})].\end{aligned}\quad (11,2)$$

Annullando queste espressioni, si ha

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}).$$

Nelle prime due equazioni si potrà, con sufficiente precisione, sostituire  $u_z$  con  $\zeta(x, y)$ ; quindi,

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

e pertanto

$$u_x = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (11,3)$$

Le costanti di integrazione sono assunte nulle purché sia  $u_x = u_y = 0$  per  $z = 0$ . Note  $u_x, u_y$ , restano determinate le componenti

del tensore di deformazione:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, & u_{yy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, & u_{xy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \\ u_{xz} = u_{yz} &= 0, & u_{zz} &= z \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \frac{\sigma}{1-\sigma}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Utilizzando la formula generale (5.10), possiamo calcolare l'energia libera  $F$  dell'unità di volume della lamina. Con un calcolo semplice, si ottiene

$$\begin{aligned} F &= z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

L'energia libera totale della lamina si ottiene integrando questa espressione su tutto il volume. Si integra su  $z$  tra  $-h/2$  e  $h/2$ ,  $h$  essendo lo spessore, e su  $x$  e  $y$  sulla superficie. Si trova così l'energia libera totale  $F_{\text{tot}} = \int F dV$  della lamina deformata:

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (11.6)$$

(essendo la deformazione piccola, si assume per elemento di superficie, con sufficiente precisione,  $dx dy$ ).

Ottenuta l'espressione dell'energia libera, si potrà prescindere dallo spessore della lamina considerandola come superficie geometrica, poiché interessa qui la forma che essa assume sotto l'azione di forze esterne e non la distribuzione delle deformazioni nella lamina; allora  $\zeta$  starà ad indicare semplicemente lo spostamento dei punti della lamina assimilata ad una superficie geometrica.

### § 12. Equazione d'equilibrio di una lamina

Dedurremo l'equazione dell'equilibrio di una lamina imponendo una condizione di minimo dell'energia libera. Calcoleremo a tale scopo la variazione dell'espressione (11.6).

Scomponiamo l'integrale che figura nella (11.6) nella somma di due integrali, di cui effettueremo separatamente le variazioni. Il primo integrale può scriversi

$$\int (\Delta \zeta)^2 df,$$

$df = dx dy$  essendo l'elemento di superficie e  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  (come nei §§ 12, 13, 14) l'operatore di Laplace bidimensionale. Variando questa espressione si ha

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df = \int \Delta \zeta \Delta \delta \zeta df = \int \Delta \zeta \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta \zeta df = \\ = \int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df - \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df.$$

Tutte le variazioni si effettuano nel sistema di coordinate piano  $x, y$ . Il primo integrale si trasforma in un integrale sul contorno chiuso, frontiera della lamina<sup>1)</sup>:

$$\int \operatorname{div} (\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) df = \oint \Delta \zeta (\mathbf{n} \operatorname{grad} \delta \zeta) dl = \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl,$$

ove  $\frac{\partial}{\partial n}$  è la derivata lungo la normale esterna al contorno.

Con la stessa trasformazione il secondo integrale può scriversi

$$\int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta df = \int \nabla (\delta \zeta \nabla \Delta \zeta) df - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \\ = \oint \delta \zeta (\mathbf{n} \nabla) \Delta \zeta dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df = \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl - \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df.$$

In definitiva si ha

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 df = \int \delta \zeta \Delta^2 \zeta df - \oint \delta \zeta \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} dl + \oint \Delta \zeta \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl. \quad (12,1)$$

La variazione sul secondo integrale è più laboriosa e conviene operare con le componenti piuttosto che in forma vettoriale. Si ha

$$\delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = \\ = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right\} df.$$

L'espressione sotto il segno di integrale può scriversi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right),$$

<sup>1)</sup> La formula di trasformazione degli integrali bidimensionali è sotto ogni aspetto l'analogia di quella tridimensionale. Il ruolo dell'elemento di volume  $dV$  spetta all'elemento di superficie  $df$  (considerato come scalare) e l'elemento di superficie  $df$  è sostituito dall'elemento di lunghezza  $dl$  moltiplicato per la normale esterna al contorno. Si passa dall'integrale su  $df$  all'integrale su  $dl$  sostituendo  $df \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $n_i dl$ . Così se  $\varphi$  è uno scalare si ha

$$\int \nabla \varphi df = \oint \varphi \mathbf{n} dl.$$

cioè come la divergenza bidimensionale di un vettore. Si può così riscrivere la variazione come un integrale sul contorno

$$\delta \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} df = \oint dl \sin \theta \times \\ \times \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \oint dl \cos \theta \left\{ \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \quad (12,2)$$

avendo indicato con  $\theta$  l'angolo tra l'asse  $x$  e la normale  $n$  al contorno (fig. 3).

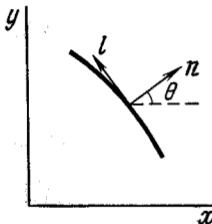


Fig. 3

Esprimiamo le derivate di  $\delta \zeta$  rispetto a  $x$  e  $y$  in funzione delle derivate nella direzione normale  $n$  e nella direzione tangente  $l$  al contorno, secondo le formule

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial l}.$$

Gli integrali nella (12,2) assumono la forma

$$\delta \int \{ \dots \} df = \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} + \oint dl \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} \times \\ \times \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Il secondo integrale può essere calcolato per parti. Poiché è preso su un contorno chiuso, i limiti di integrazione coincidono e si ha

$$-\oint dl \delta \zeta \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Raccogliendo le espressioni ottenute e moltiplicandole per i coefficienti che appaiono nella (11,6), otteniamo infine per la variazione dell'energia libera

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{tot}} = & \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left\{ \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df - \oint \delta \zeta dl \left[ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + \right. \right. \\ & + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left( \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] + \\ & \left. + \oint \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} dl \left[ \Delta \zeta + (1-\sigma) \left( 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12,3)$$

Per dedurre l'equazione dell'equilibrio della lamina occorre annullare la somma di  $\delta F$  e  $\delta U$ , variazione dell'energia potenziale della lamina dovuta all'azione delle forze esterne che agiscono sulla lamina. Quest'ultima variazione è uguale (a parte il segno) al lavoro fatto dalle forze esterne che spostano la lamina. Sia  $P$  la forza esterna che agisce sulla lamina, rapportata all'unità d'area<sup>1)</sup> e diretta lungo la normale alla superficie; il lavoro compiuto in uno spostamento è

$$\int P \delta \zeta df.$$

La condizione (necessaria) per il minimo dell'energia libera totale è

$$\delta F_{\text{tot}} - \int P \delta \zeta df = 0. \quad (12,4)$$

A primo membro figurano sia integrali di superficie che di linea. L'integrale di superficie è

$$\int \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P \right\} \delta \zeta df.$$

La variazione  $\delta \zeta$  è arbitraria, quindi l'integrale si annulla se si annulla il coefficiente di  $\delta \zeta$ , cioè

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P = 0. \quad (12,5)$$

Abbiamo così finalmente scritto l'equazione dell'equilibrio di una lamina deformata sotto l'azione di forze esterne<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> La forza  $P$  può essere qui risultato dell'azione delle forze volumetriche (ad esempio, della forza di gravità) e uguale all'integrale dell'ultima lamina, in base allo spessore.

<sup>2)</sup> Il coefficiente

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

è detto rigidità della lamina flessa.

Le condizioni ai limiti si ottengono annullando gli integrali di linea nella (12,3). Debbono essere esaminati diversi casi particolari. Supponiamo che una parte del bordo della lamina sia libera, cioè non sollecitata da forze esterne. Allora le variazioni  $\delta\zeta$  e  $\delta \frac{\partial\zeta}{\partial n}$  su questa parte sono arbitrarie e quindi i coefficienti di questa variazione debbono annullarsi. Ne discendono

$$-\frac{\partial \Delta\zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} = 0, \quad (12,6)$$

$$\Delta\zeta + (1-\sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0, \quad (12,7)$$

equazioni che debbono essere soddisfatte sulla frontiera libera della lamina.

Le condizioni al contorno (12,6) e (12,7) sono molto complesse ed il problema diventa assai più semplice quando i bordi della lamina sono *incastrati* o *poggiati*. Nel primo caso (fig. 4, a) i bordi non pos-

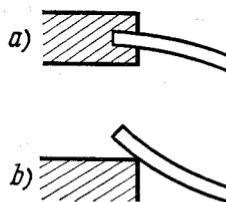


Fig. 4

sono spostarsi verticalmente e anche la loro direzione non può variare. Poiché l'angolo di cui ruota una data parte del bordo della lamina, rispetto alla sua posizione iniziale, è (per  $\zeta$  piccoli) dato da  $\frac{\partial\zeta}{\partial n}$ , ne consegue che le variazioni di  $\delta\zeta$  e  $\delta \frac{\partial\zeta}{\partial n}$  sono nulle sui bordi incastrati della lamina e quindi gli integrali di contorno nella (12,3) si annullano ivi identicamente. Le condizioni al contorno assumono la forma semplice

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \quad (12,8)$$

La prima esprime appunto la condizione che il bordo della lamina non subisca spostamenti verticali nella deformazione, la seconda che la direzione del bordo resti orizzontale.

È facile determinare le forze di reazione con cui i punti d'appoggio agiscono sulla lamina. Queste sono uguali ed opposte alle forze con cui la lamina agisce sull'appoggio. Ora, è noto dalla meccanica che la forza che agisce in una certa direzione è data dalla derivata dell'energia rispetto alla coordinata corrispondente. In particolare, la forza con cui la lamina agisce sull'appoggio è definita dalla derivata dell'energia rispetto allo spostamento  $\zeta$  del bordo della lamina, presa col segno meno, e quindi la forza opposta di reazione è uguale a detta derivata, presa col segno più. Ma questa derivata altro non è se non il coefficiente di  $\delta\zeta$  nel secondo integrale della (12,3). Quindi la forza di reazione, per unità di lunghezza del contorno, è uguale all'espressione che figura a primo membro della (12,6) (che ovviamente ora è diversa da zero) moltiplicata per  $\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ . Analogamente, il momento delle forze di reazione è definito dall'espressione a primo membro nella (12,7), moltiplicata per lo stesso fattore. Ciò discende dal fatto, ben noto in meccanica, che il momento di una forza si ottiene derivando l'energia rispetto all'angolo di rotazione del corpo. L'angolo di rotazione del bordo della lamina è uguale a  $\frac{\partial\zeta}{\partial n}$ , quindi il momento delle forze corrispondente è dato dal coefficiente di  $\delta\frac{\partial\zeta}{\partial n}$  nel terzo integrale della (12,3). In virtù delle (12,8) queste due espressioni (della forza e del momento) si semplificano considerevolmente. Poiché  $\zeta$  e  $\frac{\partial\zeta}{\partial n}$  sono nulle, identicamente sul contorno della lamina, si annullano identicamente anche le loro derivate (di ogni ordine) lungo la direzione  $\mathbf{l}$ . Tenendo in conto questo risultato, e passando nelle (12,6), (12,7) dalle derivate rispetto a  $x$  e  $y$  alle derivate rispetto a  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{l}$ , si ottiene per la forza  $F$  ed il momento  $M$  della reazione

$$F = - \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left[ \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^3} + \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} \right]. \quad (12,9)$$

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}. \quad (12,10)$$

Un altro caso importante è quello della lamina poggiata (fig. 4, b), i cui bordi sono semplicemente posati su un supporto immobile senza esservi fissati. In questo caso lo spostamento verticale è nullo, come nel caso precedente, sul contorno della lamina (cioè sulla curva in cui avviene il contatto con l'appoggio), ma la direzione può variare. Ne consegue nell'integrale di linea (12,3)

$$\delta\zeta = 0,$$

ma

$$\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} \neq 0$$

e sussiste soltanto la seconda delle condizioni (12,6), (12,7). Quanto al primo membro della (12,6), questo fornisce come prima la forza di reazione nei punti di appoggio della lamina (per quanto concerne il momento, in questo caso è nullo). La condizione al contorno (12,7) si semplifica se si passa alle derivate direzionali lungo  $\mathbf{l}$  ed  $\mathbf{n}$  e se si osserva che  $\zeta = 0$  sul contorno della lamina implica che ivi si annullano le derivate  $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$  e  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial l^2}$ . Infine le condizioni al contorno si esprimono nel seguente modo:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{d\theta}{dl} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (12,11)$$

### P R O B L E M I

1. Determinare la deformazione di una lamina circolare (di raggio  $R$ ) con i bordi incastriati, disposta orizzontalmente nel campo di gravità.

*Soluzione.* Prendiamo coordinate polari, con polo nel centro della lamina. La forza agente sull'unità di superficie è  $P = \rho hg$ . L'equazione (12,5) diviene

$$\Delta^2 \zeta = 64\beta, \quad \beta = \frac{3\rho g (1-\sigma^2)}{16h^3 E}$$

(le  $\zeta$  positive corrispondono a spostamenti lungo la forza di gravità). Poiché  $\zeta$  dipende solo da  $r$ , per  $\Delta$  in coordinate polari si ha  $\Delta = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$ . L'integrale generale di tale equazione è

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2 \ln \frac{r}{R} + d \ln \frac{r}{R}.$$

Nel nostro caso si deve porre  $d=0$ , perché  $\ln \frac{r}{R}$  diverge per  $r=0$ ; nello stesso modo  $c=0$ , perché porta ad una singolarità per  $\Delta \zeta$  in  $r=0$  (questa situazione viene a corrispondere ad una forza applicata nel centro della lamina, vedi problema 3). Le costanti  $a$  e  $b$  sono determinate dalle condizioni ai limiti  $\zeta=0$  e  $\frac{d\zeta}{dr}=0$  per  $r=R$ . Si ha infine

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2)^2.$$

2. Stesso problema per la lamina poggiata.

*Soluzione.* Le condizioni ai limiti (12,11) diventano nel caso di una lamina circolare

$$\zeta = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Procedendo come nel problema 1, si ha

$$\zeta = \beta (R^2 - r^2) \left( \frac{5+\sigma}{1+\sigma} R^2 - r^2 \right).$$

3. Determinare la deformazione di una lamina circolare, incastrata ai bordi, con applicata al centro una forza  $f$ .

*Soluzione.* Esclusa l'origine, si ha nel resto della lamina  $\Delta^2\zeta = 0$  che integra dà

$$\zeta = ar^2 + b + cr^2 \ln \frac{r}{R}$$

(anche qui  $d = 0$ ). La forza totale agente sulla lamina è data dalla forza  $f$ , applicata nel centro; allora l'integrale di  $\Delta^2\zeta$  sulla superficie della lamina deve dare

$$2\pi \int_0^R r \Delta^2\zeta \, dr = \frac{12(1-\sigma^2)}{h^3 E} f.$$

Ne segue:

$$c = \frac{3(1-\sigma^2)f}{2\pi h^3 E}.$$

Le costanti  $a$  e  $b$  sono fissate dalle condizioni al contorno. In definitiva si ha

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{2h^3\pi E} \left[ \frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

4. La stessa cosa, ma con lamina poggiata.  
*Soluzione.*

$$\zeta = \frac{3f(1-\sigma^2)}{4h^3\pi E} \left[ \frac{3+\sigma}{1+\sigma} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

5. Determinare la deformazione di una lamina circolare sospesa nel centro, nel campo di gravità.

*Soluzione.* L'equazione di  $\zeta$  e la soluzione generale sono quelle del problema 1. Poiché  $\zeta = 0$ , allora  $c = 0$ . Le costanti  $a$  e  $b$  si deducono dalle condizioni al contorno (12,6) e (12,7), che nel caso di simmetria sferica si scrivono

$$\frac{d \Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Si ha infine

$$\zeta = \beta r^2 \left[ r^2 + 8R^2 \ln \frac{R}{r} + 2R^2 \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \right].$$

6. Uno strato sottile (di spessore  $h$ ) viene staccato da un corpo sotto l'azione di forze esterne che si esercitano in opposizione alle forze di tensione superficiale sulla superficie di distacco. L'equilibrio si stabilisce, per forze esterne date, in corrispondenza ad un certo valore della superficie di distacco e ad una certa forma della lamina distaccata (fig. 5). Dedurre la formula che lega la grandezza della tensione superficiale alla forma della lamina distaccata<sup>1)</sup>.

*Soluzione.* Consideriamo lo strato distaccato come una lamina avente un bordo (da linea di distacco) incastrato. Il momento di flessione che agisce su tale bordo è assegnato dalla (12,10). Il lavoro che questo momento compie quando il dominio di distacco si allunga di  $\delta x$  è

$$M \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} = M \delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

<sup>1)</sup> Questo problema è stato considerato da I.V. Obreimov (1930) in connessione col suo metodo di misurazione del coefficiente di tensione superficiale della mica; le misure da lui eseguite con questo metodo furono le prime misure dirette della tensione superficiale dei corpi solidi.

(per quanto riguarda la forza di flessione  $F$  è un infinitesimo del secondo ordine). La condizione di equilibrio è data dall'uguaglianza di tale lavoro con la variazione di energia superficiale,  $2\alpha \delta x$  ove  $\alpha$  è la tensione superficiale ed il

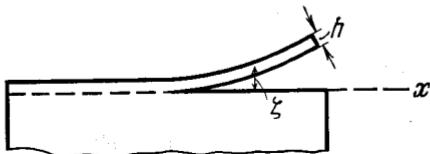


Fig. 5

fattore 2 tiene conto dell'apparizione di due superfici libere a seguito del distacco. Si ha così

$$\alpha = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

### § 13. Deformazione longitudinale delle lamine

È questo un tipo particolare di deformazione delle lamine sottili che si realizza nello stesso piano della lamina, senza che vi sia flessione. Ricaviamo le equazioni dell'equilibrio che descrivono tali deformazioni.

Se la lamina è sufficientemente sottile potrà essere considerata omogenea in tutto lo spessore. Allora il tensore di deformazione dipende solo da  $x$  e  $y$  ( $x, y$  piano della lamina) e non da  $z$ . Le deformazioni longitudinali di una lamina sono abitualmente dovute a forze applicate ai bordi, ovvero anche a forze di volume che agiscono nel piano della lamina. Le condizioni al contorno sulle due facce della lamina si scrivono allora nella forma  $\sigma_{ih}n_k = 0$ , ovvero, essendo la normale diretta lungo  $z$ ,  $\sigma_{iz} = 0$ , cioè

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Osserviamo che nell'ambito della trattazione approssimata che ci apprestiamo a svolgere, queste condizioni restano valide anche quando le forze di trazione esterne sono applicate direttamente alla superficie della lamina, poiché queste forze saranno comunque piccole rispetto agli sforzi interni longitudinali che si sviluppano nella lamina ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ). Essendo nulle sulla frontiera, le quantità  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$  sono piccole su tutto lo strato della lamina, di piccolo spessore, pertanto le potremo considerare nulle su tutto il volume.

Ponendo uguali a zero le espressioni (11,2), si ha

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \quad (13,1)$$

Facendo uso nelle formule generali (5,13) di quanto scritto sopra, si ottengono per le componenti non nulle del tensore degli sforzi le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xy}.\end{aligned}\quad (13,2)$$

Osserviamo che con la sostituzione

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (13,3)$$

si riportano queste espressioni alle formule che forniscono il legame tra gli sforzi  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  e le deformazioni  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{zz}$ , nelle deformazioni piane (formule (5,13) con  $u_{zz} = 0$ ).

Avendo eliminato lo spostamento  $u_z$ , si può considerare la lamina come un mezzo bidimensionale (« piano elastico ») senza spessore e trattare il vettore deformazione  $\mathbf{u}$  come un vettore bidimensionale con componenti  $u_x$  e  $u_y$ . Se  $P_x$  e  $P_y$  sono le componenti della forza di volume esterna per unità di superficie della lamina, le equazioni generali dell'equilibrio si scrivono

$$h \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + P_x = 0, \quad h \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + P_y = 0.$$

Facendo uso delle (13,2), si ha

$$\begin{aligned} Eh \left[ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right] + P_x &= 0, \\ Eh \left[ \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right] + P_y &= 0.\end{aligned}\quad (13,4)$$

Usando il formalismo vettoriale, possiamo riscrivere

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{ rot rot } \mathbf{u} = - \mathbf{P} \frac{1-\sigma^2}{Eh}. \quad (13,5)$$

Ovviamente si intende che tutte le operazioni debbono eseguirsi nello spazio bidimensionale. Se sono assenti forze di volume, l'equazione dell'equilibrio diviene

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2} \text{ rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (13,6)$$

Questa equazione differisce solo per il coefficiente (secondo le (13,3)) dall'equazione dell'equilibrio per una deformazione piana di un corpo indefinitamente esteso lungo  $z$  (§ 7)<sup>1</sup>). Come per la deformazione

<sup>1)</sup> Si denoma come *stato di sforzo piano* una deformazione omogenea lungo l'asse  $z$ , soddisfacente alle  $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$ , in tutto il corpo, per distinguerla da una deformazione piana per cui, in tutto il corpo, si ha  $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$ .

piana, introduciamo anche qui la « funzione degli sforzi », definita per il tramite di

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (13,7)$$

Restano allora soddisfatte le equazioni di equilibrio riscritte nella forma

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

La funzione degli sforzi soddisfa ancora l'equazione biarmonica perché per  $\Delta \chi$  si ha

$$\Delta \chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma} (u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

che differisce solo per un fattore da quella della deformazione piana.

Osserviamo che la distribuzione degli sforzi in una lamina deformata da forze date applicate ai bordi non dipende dalle costanti elastiche della sostanza costituente la lamina. Infatti queste costanti non figurano nell'equazione biarmonica soddisfatta dalla funzione degli sforzi, né nelle (13,7), che definiscono  $\sigma_{ik}$  tramite questa funzione (di conseguenza, non figurano nemmeno nelle condizioni al contorno, sui bordi della lamina).

### P R O B L E M I

1. Determinare la deformazione di un disco piano che ruota uniformemente attorno all'asse normale passante per il centro.

*Soluzione.* La soluzione differisce solo per i coefficienti da quella della deformazione piana del cilindro ruotante del problema 5 del § 7. Lo spostamento radiale  $u_r = u(r)$  è dato da

$$u = \frac{\rho \Omega^2 (1 - \sigma^2)}{8E} r \left( \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} R^2 - r^2 \right).$$

Operando la sostituzione (13,3), questa espressione è ricondotta a quella ottenuta nel problema 5, § 7.

2. Determinare la deformazione di una lamina seminfinita, con bordo rettilineo, sotto l'azione di una forza concentrata applicata in un punto del bordo e agente nel piano della lamina.

*Soluzione.* Introduciamo coordinate polari: l'angolo  $\varphi$  è contato a partire dalla direzione in cui si esplica la forza e varia tra  $-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  e  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\alpha$  essendo l'angolo tra la direzione della forza e la normale al bordo della lamina (fig. 6). In tutti i punti della frontiera libera, salvo il punto di applicazione della forza esterna (origine delle coordinate), si deve avere  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$ . Utilizzando le espressioni di  $\sigma_{\varphi\varphi}$  e  $\sigma_{r\varphi}$  dedotte nel problema 11, § 7, si trova che a tal fine occorre che la funzione degli sforzi soddisfi le

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \text{cost}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \text{cost} \quad \text{per } \varphi = \mp \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Queste due condizioni sono soddisfatte per  $\chi = rf(\varphi)$ . Con una tale funzione l'equazione biarmonica

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]^2 \chi = 0$$

dà per  $f(\varphi)$  soluzioni del tipo  $\sin \varphi, \cos \varphi, \varphi \sin \varphi, \varphi \cos \varphi$ . Le prime due sono da respingere perché danno sforzi identicamente nulli. La soluzione che fornisce

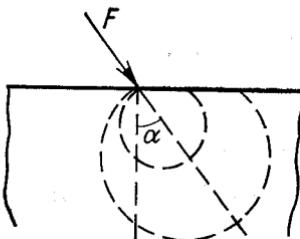


Fig. 6

il giusto valore della forza applicata nell'origine delle coordinate è

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{F}{\pi} r \varphi \sin \varphi, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

( $F$  è la forza per unità di spessore della lamina). In effetti, proiettando le forze degli sforzi interni sulle direzioni parallele e perpendicolari ad  $F$  e integrando su una piccola semicirconferenza incentrata nell'origine (dopodiché si manderà il raggio a zero), si ottiene

$$\int \sigma_{rr} \cos \varphi r d\varphi = -F,$$

$$\int \sigma_{rr} \sin \varphi r d\varphi = 0,$$

che sono proprio i valori compensati dalla forza esterna applicata nell'origine.

Le formule (1) determinano la distribuzione degli sforzi. Questa è puramente radiale: una forza di compressione radiale agisce su ogni elemento normale al raggio. Le curve di livello degli sforzi sono circonferenze  $r = d \cos \varphi$  passanti per l'origine e con centro sul supporto di  $F$  (fig. 6).

Componenti del tensore di deformazione

$$\boldsymbol{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E} \sigma_{rr}, \quad u_{r\varphi} = 0.$$

Si può di qui ricavare per integrazione, ricorrendo alle (1,8), il vettore spostamento

$$u_r = -\frac{2F}{\pi E} \cos \varphi \ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} \varphi \sin \varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{r}{a} \sin \varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Le costanti di integrazione sono state scelte in modo da escludere spostamenti d'insieme della lamina (rotazione o traslazione); a tal fine si suppone fisso un punto, scelto convenzionalmente sul supporto di  $F$ , alla distanza  $a$  dall'origine.

La soluzione dedotta permette di costruire la soluzione nel caso di una distribuzione arbitraria di forze, sul bordo della lamina (§ 8), ma ovviamente non è valida nell'intorno dell'origine.

3. Determinare la deformazione di una lamina cuneiforme (di apertura  $2\alpha$ ), infinitamente estesa, sotto l'azione di una forza applicata nel suo vertice.

*Soluzione.* La distribuzione degli sforzi è assegnata dalle formule che abbiamo dedotto nel problema precedente, a meno di un fattore. Più precisamente

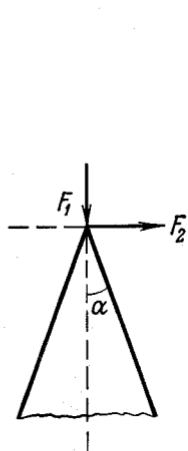


Fig. 7

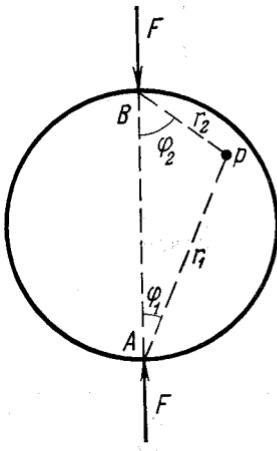


Fig. 8

distinguiamo due casi: il primo si ha per una forza che agisce lungo la linea di simmetria del cono (forza  $F_1$  nella fig. 7). Allora

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1 \cos \varphi}{r(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

Nel secondo caso, per una forza agente in direzione perpendicolare (forza  $F_2$  nella fig. 7), si ha

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2 \cos \varphi}{r(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)}.$$

In entrambi i casi l'angolo  $\varphi$  è contato a partire dalla linea di supporto della forza.

4. Determinare la deformazione di un disco circolare (di raggio  $R$ ) compresso da due forze  $F_h$  di uguale intensità e diametralmente opposte (fig. 8).

*Soluzione.* La soluzione è data dalla sovrapposizione di tre distribuzioni degli sforzi interni. I primi due sono

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_1}{r_1}, \quad \sigma_{r_1 \varphi_1}^{(1)} = \sigma_{\varphi_1 \varphi_1}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi_2}{r_2}, \quad \sigma_{r_2 \varphi_2}^{(2)} = \sigma_{\varphi_2 \varphi_2}^{(2)} = 0$$

ove  $r_1$  e  $\varphi_1$ ,  $r_2$  e  $\varphi_2$  sono le coordinate polari di un punto arbitrario  $P$ , di poli  $A$  e  $B$  (sono gli sforzi che proverebbero da una forza normale  $F$  applicata in un punto della frontiera del semipiano del problema 2). La terza distribuzione

$$\sigma_{ik}^{(3)} = \frac{F}{\pi R} \delta_{ik}$$

è una trazione uniforme d'intensità determinata. In effetti, se il punto  $P$  si trova sulla frontiera del disco, si ha  $r_1 = 2R \cos \varphi_1$ ,  $r_2 = 2R \cos \varphi_2$ , e quindi

$$\sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{F}{\pi R}.$$

Le direzioni  $r_1$  e  $r_2$  in questo punto sono perpendicolari, quindi i primi due sistemi di sforzi provocano sul bordo una compressione uniforme; queste forze sono esattamente compensate dalla trazione uniforme del terzo sistema, in modo tale che il bordo del disco è, come deve essere, libero da ogni sforzo.

5. Determinare la distribuzione degli sforzi in una lamina infinita con un foro circolare (di raggio  $R$ ), sottoposta ad una trazione uniforme.

*Soluzione.* Nel caso di una lamina senza buchi, sottoposta ad una trazione uniforme, si ha  $\sigma_{xx}^{(0)} = T$ ,  $\sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$ , ove  $T$  è la forza di trazione. Corrispondentemente la funzione degli sforzi è

$$\chi^{(0)} = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T}{2} r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} Tr^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

In presenza di un foro circolare (con centro nell'origine delle coordinate  $r$ ,  $\varphi$ ), cercheremo la funzione degli sforzi nella forma

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}, \quad \chi^{(1)} = f(r) + F(r) \cos 2\varphi.$$

L'integrale indipendente da  $\varphi$  dell'equazione biarmonica ha la forma

$$f(r) = ar^2 \ln r + br^2 + c \ln r,$$

e nell'integrale proporzionale a  $\cos 2\varphi$ , si ha

$$F(r) = dr^2 + er^4 + \frac{g}{r^2}.$$

Le costanti sono determinate dalle condizioni  $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$  per  $r = \infty$ , e  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$  per  $r = R$ . Si ha così

$$\chi^{(1)} = \frac{TR^2}{2} \left[ -\ln r + \left( 1 - \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos 2\varphi \right]$$

con una distribuzione degli sforzi

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T}{2} \left[ 1 + \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{T}{2} \left[ 1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi.$$

In particolare sulla frontiera del foro  $\sigma_{\varphi\varphi} = T(1 - 2 \cos 2\varphi)$ , e per  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  si ha  $\sigma_{\varphi\varphi} = 3T$ , che mostra come questo sforzo sia tre volte più grande di quello che si esercita all'infinito (cfr. problema 12 del § 7).

### § 14. Flessione forte di una lamina

La teoria della flessione delle lamine sottili, esposta nei §§ 11, 12 e 13, si applica soltanto a flessioni abbastanza deboli. Anticipando, indichiamo che la condizione di applicabilità di questa teoria è che lo spostamento  $\zeta$  sia piccolo confrontato con lo spessore  $h$  della lamina. Ci proponiamo ora di dedurre le equazioni dell'equilibrio di una lamina fortemente curvata. Lo spostamento cioè non viene più considerato piccolo rispetto ad  $h$ . Peraltro, sottolineiamo che la deformazione deve essere ancora piccola nel senso che il relativo tensore deve essere piccolo. Questo in pratica si traduce nella condizione  $\zeta \ll l$ , cioè lo spostamento di flessione deve essere piccolo rispetto alla dimensione  $l$  della lamina.

La flessione della lamina è di solito accompagnata da variazioni di lunghezza<sup>1)</sup>. Se la flessione è debole questo allungamento può essere trascurato, non altrettanto si può fare nel caso di flessione forte; così è evidente che in tali circostanze non esiste alcuna « superficie neutra ». L'allungamento di flessione è una peculiarità delle lamine che si distinguono in questo dalle sbarre sottili, che possono essere curvate fortemente senza variazione di lunghezza. Questa proprietà delle lamine è di natura puramente geometrica. Consideriamo ad esempio una lamina piana circolare deformata in calotta sferica. Se la deformazione non modifica la lunghezza della circonferenza, deve allungarsi il diametro; se resta invariato il diametro, la circonferenza si contrae.

L'energia (11,6) calcolata nel § 11, che converremo chiamare energia di flessione pura, rappresenta quella parte di energia dovuta alla non uniformità della trazione e della compressione nello spessore della lamina, in assenza di variazione della lunghezza. L'energia totale risulta dalla somma di questa energia e di quella che deriva dall'allungamento, che sarà denominata energia di allungamento.

Le deformazioni di flessione pura e di trazione pura sono state considerate nei §§ 11, 12, 13, e potremo quindi utilizzare direttamente quei risultati. Inoltre non abbiamo bisogno di esaminare la struttura della lamina relativamente al suo spessore, pertanto l'assumeremo ad una superficie bidimensionale senza spessore.

Determiniamo preliminarmente il tensore di deformazione ricercando la trazione della lamina (considerata come una superficie) sottoposta simultaneamente ad una flessione e ad una trazione nel suo piano. Sia  $\mathbf{u}$  il vettore spostamento bidimensionale (di componenti  $u_x$  e  $u_y$ ) corrispondente ad una trazione pura;  $\zeta$  continua a designare lo spostamento trasversale di flessione. Allora l'elemento di lunghezza della lamina non deformata  $dl^2 = dx^2 + dy^2$  diviene a seguito della deformazione

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

<sup>1)</sup> Fa eccezione ad esempio la deformazione cilindrica di una lamina piana.

Scrivendo  $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$  e analogamente per  $du_y$  e  $d\zeta$ , si ottiene, trascurando termini di ordine superiore,

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta,$$

dove abbiamo definito

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \quad (14,1)$$

(Gli indici greci qui e piú avanti assumono i valori  $x$  e  $y$ ; persiste la convenzione sulla somma di indici ripetuti.) I termini quadratici nelle derivate di  $u_\alpha$  sono stati omessi, ma ovviamente non ha senso fare altrettanto per quelli in  $\zeta$ , visto che sono assenti i corrispondenti termini lineari.

Il tensore degli sforzi  $\sigma_{\alpha\beta}$  connesso alla trazione della lamina è definito dalle formule (13,2), dove  $u_{\alpha\beta}$  è sostituito dal tensore totale di deformazione (14,1). L'energia di flessione pura è data dalla (11,6), che riscriviamo nella forma

$$\int \Psi_1(\zeta) dx dy,$$

ove  $\Psi_1(\zeta)$  designa l'integrando che figura nella (11,6). Per quel che riguarda l'energia di trazione, riferita all'unità di volume della lamina, essa, in base alle formule generali, è data da  $\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}$ . L'energia per unità di superficie si ottiene moltiplicando per  $h$ , talché l'energia totale di trazione può porsi nella forma

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta}) df$$

con

$$\Psi_2 = h \frac{\sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}}{2}. \quad (14,2)$$

In questo modo l'energia libera totale di una lamina fortemente curvata è

$$F_{\text{tot}} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})] df. \quad (14,3)$$

Prima di affrontare il problema della deduzione delle equazioni dell'equilibrio, valutiamo i due contributi all'energia totale. Le derivate prime di  $\zeta$  sono dell'ordine di  $\frac{\zeta}{l}$ , ove  $l$  è la dimensione della lamina, le derivate seconde dell'ordine  $\frac{\zeta^2}{l^2}$ . Allora, la (11,6) mostra che  $\Psi_1 \sim Eh^3 \frac{\zeta^2}{l^4}$ . D'altra parte l'ordine di grandezza del tensore  $u_{\alpha\beta}$  è  $\frac{\zeta^2}{l^2}$ , quindi  $\Psi_2 \sim Eh \frac{l^4}{l^4}$ . Confrontando queste due

espressioni si vede che è legittimo trascurare  $\Psi_2$  solo se  $\zeta^2 \ll h^2$ .

La condizione di minimo per l'energia è  $\delta F + \delta U = 0$ , ove  $U$  è l'energia potenziale dovuta al campo delle forze esterne. Supponiamo ammissibile trascurare l'effetto delle forze di trazione esterne, ove esistano, rispetto alle forze di flessione. (Questo è lecito se le forze di trazione non sono troppo importanti, perché una lamina sottile si presta più alla flessione che alla trazione.) Si ottiene allora per  $\delta U$  la stessa espressione del § 12:

$$\delta U = - \int P \delta \zeta df,$$

dove  $P$  è la forza esterna per unità di superficie della lamina. La variazione dell'integrale  $\int \Psi_1 df$  è stata calcolata al § 12:

$$\delta \int \Psi_1 df = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \int \Delta^2 \zeta \delta \zeta df.$$

Non riportiamo qui gli integrali di contorno che figurano nella (12,3) poiché questi danno condizioni ai limiti, che in questa circostanza non interessano e non figurano direttamente nelle equazioni dell'equilibrio.

Calcoliamo infine la variazione di  $\int \Psi_2 df$ . Si deve variare sia  $u$  che  $\zeta$ . Si ha

$$\delta \int \Psi_2 df = \int \frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} \delta u_{\alpha\beta} df.$$

Le derivate dell'energia libera (per unità di volume), rispetto a  $u_{\alpha\beta}$ , sono uguali a  $\sigma_{\alpha\beta}$ , pertanto  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}} = h \sigma_{\alpha\beta}$ . Sostituendo  $u_{\alpha\beta}$  con la sua espressione (14,1), segue:

$$\begin{aligned} \delta \int \Psi_2 df &= h \int \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha\beta} df = \\ &= \frac{h}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right\} df \end{aligned}$$

o, tenendo conto della simmetria di  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,

$$\delta \int \Psi_2 df = h \int \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right\} df.$$

Integrando per parti, si ha

$$\delta \int \Psi_2 df = -h \int \left[ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) \delta \zeta \right] df.$$

Anche qui non scriviamo gli integrali di linea sul contorno della lamina.

Raggruppando i termini, si ottiene

$$\delta F_{\text{tot}} + \delta U =$$

$$= \int \left\{ \left[ \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) - P \right] \delta \zeta - h \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} df = 0.$$

Questa relazione deve essere verificata identicamente quindi, annullando separatamente i coefficienti di  $\delta \zeta$  e  $\delta u_\alpha$ , si ha

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right) = P, \quad (14,4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (14,5)$$

Nel sistema appaiono tre funzioni incognite, cioè  $u_x$ ,  $u_y$  e  $\zeta$ . La soluzione definisce simultaneamente la forma della lamina deformata ( $\zeta(x, y)$ ) e la trazione. Le equazioni (14,4) e (14,5) si semplificano se si ricorre alla funzione  $\chi$  legata a  $\sigma_{\alpha\beta}$  dalle (13,7). La (14,4) si riscrive allora

$$\frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - h \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = P. \quad (14,6)$$

Le equazioni (14,5) sono automaticamente soddisfatte dalle (13,7). Bisogna stabilire ancora un'equazione che si ottiene eliminando  $u_\alpha$  dalle relazioni (13,7) e (13,2).

Si procede così: esprimiamo  $u_{\alpha\beta}$  per il tramite di  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Si ha

$$u_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E} \sigma_{xy}.$$

Sostituendo a  $u_{\alpha\beta}$  la loro espressione (14,1) e a  $\sigma_{\alpha\beta}$  le loro espressioni (13,7) segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= - \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Applicando  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  alla prima uguaglianza,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  alla seconda,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  alla terza, sommando le prime due e sottraendo l'ultima si ottiene

$$\Delta^2 \chi + E \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} = 0. \quad (14,7)$$

Le equazioni (14,6) e (14,7) costituiscono il sistema completo delle equazioni delle lame sottili in flessione forte (A. Föppl, 1907). Sono equazioni assai complesse e non si può fornire, anche nei casi

più semplici, la soluzione esatta. Si osservi che sono equazioni non lineari.

Consideriamo il caso particolare della deformazione delle membrane. Si denuncia *membrana* una lamina sottile tesa fortemente da forze applicate al bordo. Si possono trascurare le tensioni longitudinali supplementari dovute alla flessione della lamina e conseguentemente considerare che le componenti di  $\sigma_{\alpha\beta}$  siano semplicemente uguali agli sforzi di trazione esterni costanti. Nella (14,4) si può trascurare il primo termine rispetto al secondo e si ottiene l'equazione d'equilibrio

$$h\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + P = 0 \quad (14,8)$$

con condizione ai limiti  $\zeta = 0$ , sul contorno definito dal bordo della membrana. Si tratta ora di un'equazione lineare. Un caso particolarmente semplice è quello in cui la trazione è isotropa, cioè non dipende dalla direzione. Sia  $T$  il valore assoluto della forza di trazione applicata al bordo della lamina, per unità di lunghezza del bordo. Allora  $h\sigma_{\alpha\beta} = T\delta_{\alpha\beta}$ , e l'equazione dell'equilibrio è

$$T \Delta \zeta + P = 0. \quad (14,9)$$

### P R O B L E M I

1. Determinare lo spostamento di flessione di una lamina in funzione della forza; la flessione è supposta così forte che  $\zeta \gg h$ .

*Soluzione.* Valutando i termini nell'equazione (14,7), si vede che  $\chi \sim E\zeta^2$ . Quando  $\zeta \gg h$ , il primo termine nella (14,6) è piccolo rispetto al secondo, d'ordine di grandezza  $\frac{h\zeta\chi}{l^4} \sim \frac{Eh\zeta^3}{l^4}$  ( $l$  rappresenta le dimensioni della lamina). Confrontando con la forza esterna si ha

$$\zeta \sim \left( \frac{l^4 P}{Eh} \right)^{1/3}.$$

Allora  $\zeta$  va come la radice cubica della forza.

2. Determinare la deformazione di una membrana circolare, di raggio  $R$ , disposta orizzontalmente nel campo di gravità.

*Soluzione.* Si ha  $P = \rho gh$ ; in coordinate polari la (14,9) diventa  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = -\frac{\rho gh}{T}$ . La soluzione che si mantiene finita per  $r=0$  e che soddisfa la condizione  $\zeta=0$  per  $r=R$ , è

$$\zeta = \frac{\rho gh}{4T} (R^2 - r^2).$$

### § 15. Deformazioni degli inviluppi

Nel parlare della deformazione di lamine sottili, ci siamo fin qui riferiti al caso in cui, nello stato non deformato, queste lamine sono piane. Le deformazioni di lamine, che nello stato naturale sono

curve (sono dette *inviluppi*), presentano delle specificità che le differenziano dalle deformazioni delle lame piane.

La trazione che accompagna la flessione di una lamina piana è un effetto del secondo ordine relativamente allo spostamento di flessione, il che viene espresso, per esempio, dal fatto che il tensore di deformazione (14,1) che definisce una tale trazione contiene solo termini quadratici in  $\zeta$ . La situazione è tutt'altra nel caso di deformazioni di inviluppi: la trazione qui è un effetto del primo ordine e di conseguenza ha un ruolo maggiore, anche nel caso di flessione debole. Questa proprietà è evidente se si considera il caso più semplice della trazione uniforme di un inviluppo sferico. Se tutti i punti subiscono un uguale spostamento radiale  $\zeta$ , la lunghezza dell'equatore aumenta di  $2\pi\zeta$ . L'allungamento relativo è dato da  $\frac{2\pi\zeta}{2\pi R} = \frac{\zeta}{R}$ , quindi il tensore di deformazione è proporzionale alla prima potenza di  $\zeta$ . Questo effetto scompare per  $R \rightarrow \infty$ , cioè quando la curvatura tende a zero, quindi resta confermato che si ha a che fare con una proprietà specifica, connessa alla curvatura dell'inviluppo.

Sia  $R$  l'ordine di grandezza del raggio di curvatura dell'inviluppo, che coincide abitualmente con l'ordine di grandezza delle sue dimensioni. Allora il tensore di deformazione di trazione che accompagna la flessione è dell'ordine di grandezza di  $\frac{\zeta}{R}$ , il corrispondente tensore degli sforzi è  $\sim E \frac{\zeta}{R}$ ; dalla (14,2) segue che l'energia di deformazione (per unità di superficie) è dell'ordine di  $Eh \left(\frac{\zeta}{R}\right)^2$ . L'energia di flessione pura è, come prima, dell'ordine di  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{R^4}$ . Il rapporto tra questi due ordini è  $\left(\frac{R}{h}\right)^2$ , cioè grande. Sottolineiamo anche che questo rapporto viene ad essere indipendente dal legame tra la grandezza della flessione  $\zeta$  e lo spessore  $h$ , mentre si ricorda che nel caso delle lame piane in flessione la trazione aveva un ruolo solo per  $\zeta \sim h$ .

In alcuni casi si presenta un tipo particolare di flessione di inviluppi, non accompagnata da trazione. Questo si verifica nel caso di una superficie cilindrica (aperta sopra e sotto), che può essere deformata senza trazione, se durante la flessione tutte le generatrici restano parallele tra loro (l'inviluppo è in qualche modo compresso lungo una generatrice). Deformazioni siffatte, senza trazione, sono geometricamente possibili se l'inviluppo possiede bordi liberi (cioè se non è chiuso), ovvero, se è chiuso, quando il segno della curvatura varia al variare dei punti. Così una superficie sferica chiusa non può essere deformata senza trazione ma se ha un foro (a bordo libero), queste deformazioni sono possibili. Poiché l'energia di flessione pura è piccola rispetto all'energia di trazione, è chiaro che se un dato inviluppo è in grado di ammettere deformazioni senza trazione,

saranno proprio queste, in generale, le deformazioni che effettivamente avranno luogo sotto l'azione di forze esterne. La richiesta che si abbia una flessione senza trazione impone delle restrizioni essenziali sui possibili spostamenti  $u_\alpha$ . Queste condizioni sono puramente geometriche e possono essere espresse sotto forma di equazioni differenziali che entrano a far parte del sistema completo delle equazioni dell'equilibrio. Non entreremo in merito su questo argomento.

Se la deformazione dell'inviluppo avviene con trazione, gli sforzi di trazione in genere dominano rispetto agli sforzi di flessione, che possono essere trascurati (la corrispondente teoria degli inviluppi è detta *di membrana*).

L'energia di trazione dell'inviluppo può calcolarsi a partire dall'integrale

$$F_{\text{tot}} = \frac{h}{2} \int u_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\mathcal{F} \quad (15,1)$$

esteso alla superficie. Qui  $u_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) è il tensore di deformazione bidimensionale, espresso in un opportuno sistema di coordinate curvilinee; il tensore degli sforzi  $\sigma_{\alpha\beta}$  è connesso a  $u_{\alpha\beta}$  dalle (13,2), che possono essere scritte con notazione tensoriale bidimensionale

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\sigma^2} [(1-\sigma) u_{\alpha\beta} + \sigma \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma}]. \quad (15,2)$$

Il caso in cui l'inviluppo è sottoposto a forze concentrate trasversali esige un'analisi particolare. Forze simili possono evidentemente essere le forze di reazione con cui gli appoggi agiscono sull'inviluppo nei punti (o lungo le linee) di contatto. Le forze concentrate deformano l'inviluppo in una piccola regione attorno al punto di applicazione. Sia  $d$  l'ordine di grandezza di questa regione (area  $\sim d^2$ ) per la forza  $f$  applicata in un punto. Poiché la flessione  $\zeta$  varia sensibilmente sulla distanza  $d$ , l'energia di flessione (per unità di area) sarà dell'ordine di  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4}$ , e l'energia di flessione totale (sull'area  $\sim d^2$ ) dell'ordine di  $Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^2}$ . Il tensore di deformazione di trazione è sempre di ordine  $\sim \frac{\zeta}{R}$ ,

l'energia totale della trazione dovuta alla forza concentrata  $\sim Eh \frac{\zeta^2}{R^2} d^2$ . L'energia di flessione cresce, mentre l'energia di trazione decresce, quando  $d$  diviene più piccolo, quindi è chiaro che si dovrà tener conto di entrambe queste due energie quando si determinerà la deformazione nell'intorno del punto di applicazione della forza concentrata. Per quanto riguarda

l'ordine di grandezza  $d$  della regione flessa, questo si deduce dalla condizione di minimo della somma delle due energie. Si ha

$$d \sim \sqrt{hR}. \quad (15,3)$$

Allora l'energia  $\sim Eh^2\zeta^2/R$ . Variando questa energia rispetto a  $\zeta$  e uguagliandola al lavoro della forza  $f$ , si ottiene per la grandezza della freccia  $\zeta$ :  $\zeta \sim fR/Eh^2$ .

Tuttavia, se le forze che agiscono sull'inviluppo sono sufficientemente grandi, la sua forma potrà variare notevolmente per effetto di piegamento<sup>1)</sup>. In questo caso specifico, la determinazione della deformazione in funzione dei carichi applicati esige uno studio particolare<sup>2)</sup>.

Consideriamo un inviluppo convesso (i cui bordi siano mantenuti in modo da assicurare l'indeformabilità geometrica globale) sottoposto ad una grande forza concentrata  $f$ , diretta secondo la normale interna alla superficie. Supporremo per semplicità che l'inviluppo sia una regione sferica, di raggio  $R$ . La regione deformata sarà una calotta sferica, con configurazione all'incirca simmetrica di quella iniziale (la fig. 9 rappresenta una sezione meridiana dell'inviluppo). Si tratta di determinare le dimensioni della deformazione in funzione della forza.

La maggior parte dell'energia elastica è localizzata in una stretta banda, nei pressi del bordo della regione, dove la flessione dell'inviluppo è relativamente importante (tale regione è detta banda di flessione, la sua larghezza è indicata con  $d$ ). Valutiamo questa energia supponendo che il raggio della calotta sferica  $r$  sia molto minore di  $R$ ; allora l'angolo  $\alpha$  è molto minore di 1 (fig. 9). In queste condizioni  $r = R \sin \alpha \sim R\alpha$  e la freccia  $H = 2R(1 - \cos \alpha) \sim R\alpha^2$ . Denotiamo con  $\zeta$  lo spostamento dei punti nella banda di flessione. Esattamente come sopra, si trova che le energie di flessione lungo

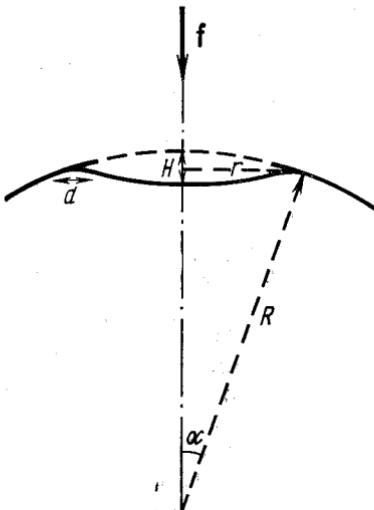


Fig. 9

<sup>1)</sup> Nella letteratura scientifica anglosassone: « buckling » (N.d.T.).

<sup>2)</sup> I risultati qui esposti sono dovuti a A. V. Pogorelov (1960). Si troverà un'analisi più dettagliata del problema e di questioni similari nel suo libro: Teoria degli inviluppi per deformazioni transcritiche, 1965 (ed. russa).

il meridiano e di trazione lungo un parallelo<sup>1)</sup>, per cm<sup>2</sup> di superficie, hanno rispettivamente ordini di grandezza

$$Eh^3 \frac{\zeta^2}{d^4} \text{ e } Eh \frac{\zeta^2}{R^2}.$$

L'ordine di grandezza dello spostamento  $\zeta$  si determina nel caso considerato geometricamente: la direzione del meridiano varia sulla distanza  $d$  dell'angolo  $\sim \alpha$  e si ha  $\zeta \sim ad \sim rd/R$ . Moltiplicando per l'area della banda di flessione ( $\sim rd$ ), si ottengono le energie

$$E \frac{h^3 r^3}{R^2 d} \text{ e } E \frac{h d^3 r^3}{R^4}.$$

Nuovamente si deduce dalla condizione di minimo per la loro somma  $d \sim \sqrt{hR}$ , l'energia elastica totale è allora  $\sim Er^3 (h/R)^{5/2}$ , ovvero<sup>2)</sup>

$$\text{cost. } Eh^{5/2} \frac{H^{3/2}}{R}. \quad (15,4)$$

In questa deduzione si è supposto  $d \ll r$ ; allora la (15,4) è vera se<sup>3)</sup>

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1. \quad (15,5)$$

Si ottiene la dipendenza cercata della freccia  $H$  dalla forza applicata  $f$ , uguagliando quest'ultima alla derivata dell'energia (15,4), rispetto ad  $H$ ; si ha

$$H \sim \frac{f^2 R^2}{E^2 h^5}. \quad (15,6)$$

Osserviamo che tale relazione è non lineare.

Infine supponiamo che la deformazione (il piegamento) dell'inviluppo risulti da una pressione esterna uniforme  $p$ . Il lavoro delle forze è allora  $p \Delta V$ , dove  $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2 R$  è la variazione del volume, delimitato dall'inviluppo, a seguito del piegamento. Annnullando la derivata dell'energia libera totale rispetto ad  $H$  (della differenza dell'energia elastica (15,4) e di questo lavoro), si ha

$$H \sim \frac{h^5 E^2}{R^4 p^2}. \quad (15,7)$$

<sup>1)</sup> In prima approssimazione, la curvatura dell'inviluppo non ha effetti sulla flessione secondo il meridiano talché, come nel caso della flessione cilindrica di una lamina piana, non c'è allungamento secondo il meridiano.

<sup>2)</sup> Un calcolo più preciso dà per il coefficiente il valore  $\text{cost} = 1, 2 (1 - \sigma^2)^{-3/4}$ .

<sup>3)</sup> A seguito del piegamento, gli strati esterni della calotta sferica diventano interni e quelli interni esterni: i primi quindi si comprimono, i secondi si dilatano. La trazione (o compressione) relativa è  $\sim h/R$ , cosicché l'energia totale nella zona del piegamento è

$$\sim E \left( \frac{h}{R} \right)^2 hr^2.$$

Per la condizione (15,5) essa è effettivamente piccola rispetto all'energia nella banda di flessione (15,4).

Il carattere di questa dipendenza di  $H$  da  $p$  (come l'inverso del quadrato) indica che lo stato di piegamento, in questo caso, è instabile. Il valore di  $H$  definito dalla (15,7) corrisponde ad uno stato di equilibrio instabile per un dato valore di  $p$ : il piegamento aumenta spontaneamente oltre questo valore di  $H$ , diminuisce al di sotto (si verifica facilmente che la (15,7) corrisponde ad un massimo e non ad un minimo dell'energia totale). Esiste un valore critico del carico esterno  $p = p_{\text{crit}}$ , oltre il quale le perturbazioni, piccole quanto si vuole, si amplificano. Si può valutare tale valore critico come quello per cui la (15,7) dà  $H \sim h$ :

$$p_{\text{crit}} \sim E \frac{h^2}{R^2}. \quad (15,8)$$

Per quanto riguarda la teoria degli inviluppi ci limitiamo a questa rapida rassegna e agli esempi semplici che seguono.

### PROBLEMI

1. Dedurre le equazioni dell'equilibrio di un inviluppo sferico (di raggio  $R$ ) deformato simmetricamente rispetto ad un asse passante per il suo centro.

*Soluzione.* Identificheremo i punti dell'inviluppo per mezzo degli angoli  $\theta$  e  $\phi$  di un sistema di coordinate sferiche, con centro nella sfera e come asse polare l'asse di simmetria dell'inviluppo deformato.

Sia  $P_r$  la forza radiale esterna ripartita sull'unità d'area della superficie dell'inviluppo. Questa forza deve essere compensata dalla risultante radiale delle forze degli sforzi interni che agiscono tangenzialmente sull'elemento dell'inviluppo. Allora si ha

$$\frac{h}{R} (\sigma_{\phi\phi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \quad (1)$$

Questa equazione è del tutto analoga all'equazione di Laplace che determina la differenza di pressione in due mezzi, dovuta alla tensione superficiale che agisce sulla superficie di separazione.

Sia  $Q_z(\theta)$  la risultante lungo  $z$  (asse polare) di tutte le forze esterne che agiscono sulla parte dell'inviluppo situata al di sopra del cerchio parallelo  $\theta = \text{cost}$ . Questa forza deve essere equilibrata dalla proiezione sull'asse  $z$  degli sforzi,  $2\pi R \sin \theta h \sigma_{\theta\theta}$  che agiscono sulla sezione  $2\pi Rh \sin \theta$  dell'inviluppo secondo il detto cerchio. Si ha

$$2\pi R h \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \quad (2)$$

Le equazioni (1) e (2) determinano la distribuzione degli sforzi, il tensore di deformazione è dato quindi dalle formule

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma \sigma_{\phi\phi}), \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\phi\phi} - \sigma \sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\phi} = 0 \quad (3)$$

e il vettore spostamento dalla soluzione delle equazioni

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{du_\theta}{d\theta} + u_r \right), \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{R} (u_\theta \cot \theta + u_r). \quad (4)$$

2. Determinare la deformazione di un inviluppo semisferico, bombato verso l'alto, sotto l'effetto del proprio peso; i bordi della cupola possono spostarsi liberamente sull'appoggio orizzontale (vedi fig. 10).

*Soluzione.* Si ha

$$P_r = -\rho g h \cos \theta,$$

$$Q_z = -2\pi R^2 (1 - \cos \theta) \rho g h$$

( $Q_z$  è il peso totale dell'inviluppo al di sopra del cerchio  $\theta = \text{cost}$ ). Dalle (1), (2) discende

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R\rho g}{1 + \cos \theta},$$

$$\sigma_{rr} = R\rho g \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} \cos \theta \right).$$

Si calcolano  $u_{\varphi\varphi}$  e  $u_{\theta\theta}$  per il tramite delle (3), quindi  $u_\theta$  e  $u_r$  con le (4); la costan-

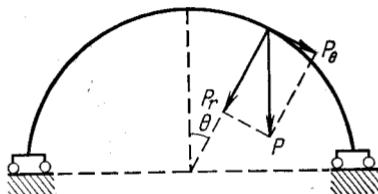


Fig. 10

te d'integrazione della prima equazione (4) è determinata dalla condizione  $u_\theta = 0$  per  $\theta = \pi/2$ . Si ha infine

$$u_\theta = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln (1 + \cos \theta) \right] \sin \theta,$$

$$u_r = \frac{R^2 \rho g (1 + \sigma)}{E} \left[ 1 - \frac{2 + \sigma}{1 + \sigma} \cos \theta - \cos \theta \ln (1 + \cos \theta) \right].$$

Il valore di  $u_r$  per  $\theta = \pi/2$  dà lo spostamento orizzontale dell'appoggio.

3. Determinare la deformazione di un inviluppo semisferico, con bordi fissati, la cupola diretta verso il basso e riempita di liquido (vedi fig. 11); si può trascurare il peso dell'inviluppo rispetto al peso del liquido.

*Soluzione.* Si ha

$$P_r = \rho_0 g R \cos \theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2 \int_0^\theta P_r \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi R^3 \rho_0 g}{3} (1 - \cos^3 \theta)$$

( $\rho_0$  è la densità del liquido). Dalle (1) e (2) discendono

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R^2 \rho_0 g}{3h} \frac{(-1 + 3 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta}.$$

Per gli spostamenti si ha

$$u_\theta = -\frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \sin \theta \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \ln (1 + \cos \theta) \right],$$

$$u_r = \frac{R^3 \rho_0 g (1 + \sigma)}{3Eh} \left[ \cos \theta \ln (1 + \cos \theta) - 1 + \frac{3 \cos \theta}{1 + \sigma} \right].$$

Quando  $\theta = \pi/2$ ,  $u_r$  non si annulla, contro l'attesa. Questo significa che la flessione dell'inviluppo è così forte nei pressi della linea su cui è fissato, che la soluzione ottenuta perde di validità.

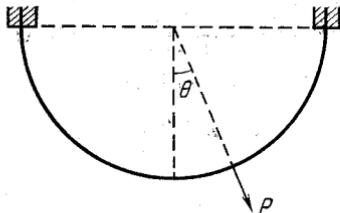


Fig. 11

4. Un inviluppo avente la forma di una calotta sferica poggia con i suoi bordi su un sostegno fisso (vedi fig. 12). Determinare la freccia risultante dal peso proprio  $Q$  dell'inviluppo.

*Soluzione.* La deformazione si produce essenzialmente nei pressi dei bordi che si raddrizzano lateralmente (linea tratteggiata nella fig. 12). Allora  $u_\theta$  è piccolo rispetto a  $u_r \equiv \zeta$ ; poiché  $\zeta$  decresce rapidamente quando ci si allontana dalla linea d'appoggio, si può assimilare la deformazione a quella di una

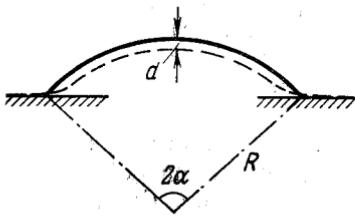


Fig. 12

lamina piana lunga (di lunghezza  $2\pi R \sin \alpha$ ). Questa deformazione consta di una flessione e di una trazione. L'allungamento relativo della lamina è in ogni punto  $\zeta/R$  ( $R$  è il raggio dell'inviluppo); quindi l'energia di trazione per unità di volume è  $\frac{E\zeta^2}{2R^2}$ . Consideriamo come variabile indipendente  $x$  la distanza dalla linea d'appoggio; per l'energia totale di trazione si ha

$$F_1 \text{ tot} = 2\pi R \sin \alpha \frac{hE}{2R^2} \int \zeta^2 dx.$$

L'energia di flessione vale

$$F_2 \text{ tot} = 2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Variando rispetto a  $\zeta$  la somma  $F_{\text{tot}} = F_1 \text{ tot} + F_2 \text{ tot}$ , si ha l'equazione

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \zeta = 0.$$

Quando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\zeta$  deve tendere a zero, e per  $z = 0$  debbono essere soddisfatte le condizioni ai limiti di annullamento del momento delle forze;  $\zeta'' = 0$ , e le condizioni di uguaglianza della forza normale alla superficie dell'inviluppo, dovuta alla flessione, con la componente della forza di gravità:

$$2\pi R \sin \alpha \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \zeta'' = Q \cos \alpha.$$

La soluzione che soddisfa queste condizioni è

$$\zeta = Ae^{-\kappa x} \cos \kappa x,$$

dove

$$\kappa = \left[ \frac{3(1-\sigma^2)}{h^2 R^2} \right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q \cotg \alpha}{Eh} \left[ \frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^2} \right]^{1/4}.$$

La freccia è

$$d = \zeta(0) \cos \alpha = A \cos \alpha.$$

### §. 16. Torsione di sbarre

Consideriamo ora le deformazioni di sbarre sottili: questo caso si distingue da tutto quello che abbiamo sin qui esaminato per il fatto che il vettore spostamento  $\mathbf{u}$  può essere grande anche per piccole deformazioni, cioè per piccoli  $u_{ik}$ <sup>1)</sup>. Così, quando si piega una sbarra sottile e lunga, le sue estremità possono spostarsi considerevolmente nello spazio, anche quando gli spostamenti relativi dei punti vicini sono piccoli.

Esistono due tipi di deformazioni di una sbarra che possono provocare uno spostamento grande delle diverse parti: la flessione e la torsione. Cominceremo con l'esaminare quest'ultima.

La torsione è una deformazione per cui nella sbarra, che pure resta rettilinea, ciascuna sezione ruota di un dato angolo rispetto alle sezioni adiacenti. Se la sbarra è lunga, basta una leggera torsione perché sezioni sufficientemente distanti l'una dall'altra ruotino di un angolo considerevole. Le generatrici della superficie laterale della sbarra, parallele al suo asse, in seguito alla torsione divengono eliche.

Consideriamo una sbarra sottile, rettilinea, di sezione arbitraria. Come sistema di coordinate fissiamone uno con asse  $z$  lungo l'asse della sbarra e origine in un qualunque punto interno. Definiamo *angolo di torsione*  $\tau$ , l'angolo di rotazione per unità di lunghezza, cioè, due sezioni trasversali distanti  $dz$  ruotano l'una rispetto all'altra di un angolo  $d\varphi = \tau dz$  (talché  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$ ). La deformazione della torsione, cioè lo spostamento relativo delle parti vicine, è supposta piccola. Questo caso si verifica quando la rotazione relativa di sezioni

<sup>1)</sup> Fa eccezione la trazione semplice, senza alterazione della forma: se la trazione è debole, il vettore  $\mathbf{u}$  è piccolo al pari di  $u_{ik}$ .

che si trovano a distanza dell'ordine delle dimensioni trasversali  $R$  della sbarra è piccola:

$$\tau R \ll 1. \quad (16,1)$$

Consideriamo un piccolo tronco di sbarra nei pressi dell'origine e determiniamo lo spostamento  $\mathbf{u}$  in questa regione. Prendiamo come sezione di riferimento quella coincidente col piano  $x, y$ . È noto che quando il raggio vettore  $\mathbf{r}$  ruota di un angolo  $\delta\varphi$  la sua estremità libera si sposta di

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \mathbf{r}], \quad (16,2)$$

ove  $\delta\varphi$  è un vettore avente modulo pari all'angolo di rotazione e direzione parallela all'asse di rotazione. Nel nostro caso la rotazione avviene attorno all'asse  $z$ , conseguentemente i punti di coordinata  $z$  ruotano, rispetto al piano  $x, y$ , dell'angolo  $\tau z$  (nell'intorno dell'origine,  $\tau$  può essere assunto costante); la (16,2) fornisce allora le componenti  $u_x$  e  $u_y$  del vettore spostamento

$$u_x = -\tau zy, \quad u_y = \tau zx. \quad (16,3)$$

Nel corso della torsione, in generale, i punti della sbarra si spostano anche lungo l'asse  $z$ . Questo spostamento è nullo per  $\tau = 0$ , pertanto per piccoli valori di  $\tau$  lo si potrà assumere nella forma

$$u_z = \tau\psi(x, y), \quad (16,4)$$

ove  $\psi(x, y)$  è una certa funzione di  $x$  e  $y$ , detta funzione di torsione. A seguito della deformazione descritta dalle (16,3), (16,4), ciascuna sezione trasversale ruota attorno all'asse  $z$  e contemporaneamente si incurva, cessando di essere piana. Notiamo che, avendo scelto in modo determinato l'origine sul piano  $x, y$ , abbiamo con ciò «fissato» un punto della sezione che pertanto non può spostarsi su questa sezione (ma può scorrere lungo l'asse  $z$ ); ovviamente cambiare l'origine delle coordinate non comporta alcun mutamento essenziale nella descrizione della deformazione di torsione, traducendosi in una semplice traslazione della sbarra, che è appunto irrilevante.

Noto  $\mathbf{u}$ , possono determinarsi le componenti del tensore di deformazione. Poiché  $\mathbf{u}$  è piccolo nella regione in considerazione, potremo

scrivere  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ . Si ha in definitiva

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0,$$

$$u_{xz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (16,5)$$

Notiamo che  $u_{ii} = 0$ , talché la torsione avviene senza variazione di volume, e quindi è una deformazione di puro scorrimento.

Per le componenti del tensore degli sforzi, si ha

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu \tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu \tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (16,6)$$

(risulta piú comodo qui servirsi del modulo di scorrimento  $\mu$  al posto di  $E$  e di  $\sigma$ ). Sono diverse da zero solo  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , cosicché le equazioni dell'equilibrio  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$  si riducono all'equazione

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (16,7)$$

Sostituendo la (16,6), si trova che la funzione di torsione deve soddisfare la

$$\Delta \psi = 0, \quad (16,8)$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace bidimensionale.

Conviene tuttavia usare un'altra funzione ausiliaria  $\chi(x, y)$  definita dalle

$$\sigma_{xz} = 2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (16,9)$$

in quanto per questa funzione risultano piú comode le condizioni ai limiti sul contorno della sezione della sbarra (vedi piú avanti). Dalle (16,9), (16,6) segue:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (16,10)$$

Derivando la prima uguaglianza rispetto ad  $y$ , la seconda rispetto ad  $x$ , e sottraendo, si ha per  $\chi$

$$\Delta \chi = -1. \quad (16,11)$$

Per determinare le condizioni ai limiti, sulla superficie della sbarra, osserviamo che, essendo la sbarra sottile, le forze esterne che agiscono sulla superficie laterale sono piccole rispetto agli sforzi interni e potranno essere considerate nulle (relativamente alla ricerca delle condizioni ai limiti). Questa circostanza è l'analogia di quella che si è presentata nel corso dello studio della flessione per lamine sottili. Così dunque si deve avere sulla superficie laterale della sbarra  $\sigma_{ik} n_k = 0$ ; poiché l'asse  $z$  è l'asse della sbarra, la normale  $n$  ha come componenti  $n_x$  e  $n_y$ , e l'equazione si riduce alla

$$\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0.$$

Sostituendovi le (16,9), si ha

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0.$$

Ora, le componenti della normale al contorno piano (al contorno della sezione della sbarra) sono  $n_x = -\frac{dy}{dl}$ ,  $n_y = \frac{dx}{dl}$ , ove  $x$  e  $y$  sono le coordinate dei punti del contorno e  $dl$  l'elemento della lunghezza dell'arco. Allora si ha

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi = 0,$$

cioè  $\chi = \text{cost}$  sulla linea di contorno della sezione. Poiché nella definizione (16,9) intervengono solo le derivate di  $\chi$ , ovviamente essa stessa è determinata a meno di una costante additiva. Se il contorno è semplicemente connesso si potrà, senza perdita di generalità, prendere come condizione al limite dell'equazione (16,11)<sup>1)</sup>

$$\chi = 0. \quad (16,12)$$

Ma se il contorno non è molteplicemente connesso,  $\chi$  avrà diversi valori costanti su ciascuna delle curve chiuse che costituiscono il contorno. Quindi  $\chi$  potrà essere presa nulla solo su una di tali curve, per esempio sul contorno esterno ( $C_0$  nella fig. 13). I valori di  $\chi$

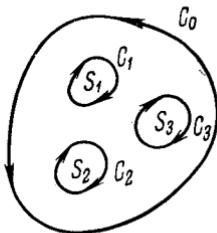


Fig. 13

sulle altre componenti del contorno sono assegnati dalla condizione che deriva dal fatto che lo spostamento  $u_z = \tau\psi(x, y)$  sia una funzione univoca delle coordinate. Cioè a dire, se  $\psi(x, y)$  deve essere univoca, deve annullarsi l'integrale del suo differenziale  $d\psi$  esteso ad una curva chiusa. Allora dalle (16,10) segue:

$$\begin{aligned} \oint d\psi &= \oint \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\ &= -2 \oint \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - \oint (x dy - y dx) = 0, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Il problema della determinazione della deformazione di torsione a partire dall'equazione (16,11) con condizione al limite (16,12) coincide formalmente col problema della determinazione dello spostamento di flessione di una membrana piana, con carico uniforme (cfr. equazione (14,9)).

È da notare l'analogia idrodinamica: la distribuzione delle velocità  $v(x, y)$  di un fluido viscoso nella sezione di un tubo è definita da un'equazione della forma (16,11); alla condizione limite (16,12) corrisponde la condizione  $v = 0$  sulle pareti immobili del tubo (vedi VI, § 17).

ovvero

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n} dl = -S, \quad (16,13)$$

dove  $\frac{\partial \chi}{\partial n}$  è la derivata nella direzione della normale esterna al contorno ed  $S$  l'area delimitata da questo contorno. Applicando la (16,13) a ciascuna delle curve chiuse  $C_1, C_2, \dots$ , si ottengono le condizioni richieste.

Troviamo l'energia libera della sbarra torta. L'energia per unità di volume è

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \sigma_{xx} u_{xx} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yz}^2),$$

cioè, dalle (16,9),

$$F = 2\mu\tau^2 \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] = 2\mu\tau^2 (\nabla \chi)^2,$$

$\nabla$  designa il gradiente bidimensionale. Integrando sull'area della sezione trasversale si ottiene l'energia per unità di lunghezza, che si scrive come  $\frac{C\tau^2}{2}$ , dove

$$C = 4\mu \int (\nabla \chi)^2 df$$

è detto *rigidità di torsione* della sbarra. L'energia elastica totale è data da

$$F_{\text{sbar}} = \frac{1}{2} \int C\tau^2 dz, \quad (16,14)$$

L'integrale è esteso alla lunghezza della sbarra.

Scrivendo

$(\nabla \chi)^2 = \nabla(\chi \nabla \chi) - \chi \Delta \chi = \nabla(\chi \nabla \chi) + \chi$  e trasformando l'integrale del primo termine in integrale sul contorno della sezione della sbarra, si ha

$$C = 4\mu \oint \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dl + 4\mu \int \chi df. \quad (16,15)$$

Se il contorno è semplicemente connesso, il primo termine scompare in virtù della condizione al contorno  $\chi = 0$  e resta

$$C = 4\mu \int \chi dx dy. \quad (16,16)$$

Se la frontiera è molteplicemente connessa (vedi fig. 13), posto  $\chi = 0$  sul contorno esterno  $C_0$ , designando con  $\chi_k$  i valori costanti di  $\chi$  sui contorni interni  $C_k$ , si ha per il tramite della (16,13)

$$C = 4\mu \sum_k \chi_k S_k + 4\mu \int \chi dx dy \quad (16,17)$$

(si osservi che nell'integrazione del primo termine della (16,15) il contorno  $C_0$  è descritto in senso antiorario,  $C_k$  in senso opposto).

Consideriamo il caso più usuale di torsione, quando uno degli estremi è fissato e le forze esterne sono applicate all'altro estremo. L'effetto delle forze dovrà essere una torsione, ogni altra deformazione, per esempio la flessione, essendo esclusa, cioè si ha una coppia di forze che torcono la sbarra attorno al proprio asse.  $M$  indicherà il momento di tale coppia.

Allora sarà naturale attendersi che l'angolo di torsione  $\tau$  sia costante lungo la sbarra. Si potrà constatare che è effettivamente così, partendo dalla richiesta di minimo dell'energia libera totale della sbarra in equilibrio. L'energia totale della sbarra deformata è uguale alla somma  $F_{\text{sbar}} + U$ , ove  $U$  è l'energia potenziale dovuta all'azione delle forze esterne. Sostituendo  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  nella (16,14) e facendo una variazione rispetto a  $\varphi$ , si ha

$$\delta \frac{1}{2} \int C \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \delta U = \int C \frac{d\varphi}{dz} \frac{d \delta \varphi}{dz} dz + \delta U = 0$$

ovvero, integrando per parti,

$$-\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta U + C\tau \delta\varphi = 0.$$

Nell'ultimo termine del primo membro si intende la differenza dei valori corrispondenti ai due estremi di integrazione, cioè sulle estremità della sbarra; una di queste è fissa, per esempio quella inferiore, talché ivi  $\delta\varphi = 0$ . Per quanto riguarda  $\delta U$ , questa variazione, col segno cambiato, dà il lavoro effettuato dalle forze esterne nella rotazione  $\delta\varphi$ . Ora, è noto dalla meccanica che il lavoro di una coppia di forze in una rotazione  $\delta\varphi$  è dato da  $M \delta\varphi$ . Poiché non vi sono altre forze esterne, si ha  $\delta U = -M \delta\varphi$ , e quindi,

$$\int C \frac{d\tau}{dz} \delta\varphi dz + \delta\varphi (-M + C\tau) = 0. \quad (16,18)$$

Nel secondo termine si prende il valore nell'estremo superiore. La variazione di  $\delta\varphi$  è arbitraria nell'integrale su  $dz$ , quindi

$$C \frac{d\tau}{dz} = 0,$$

cioè

$$\tau = \text{cost.} \quad (16,19)$$

Dunque l'angolo di torsione è costante lungo tutta la sbarra. La rotazione della sezione superiore rispetto a quella inferiore è uguale a  $\tau l$ , dove  $l$  è la lunghezza della sbarra.

Nell'equazione (16,18) deve annullarsi anche il secondo termine. Il valore dell'angolo di torsione è

$$\tau = \frac{M}{C}. \quad (16,20)$$

### PROBLEMI

1. Determinare la rigidità di torsione di una sbarra di sezione circolare, di raggio  $R$ .

*Soluzione.* Le soluzioni dei problemi 1-4 coincidono formalmente con quelle dei problemi del moto di un liquido viscoso in un tubo di uguale sezione (vedi nota, pag. 89); alla quantità  $Q$  di liquido che scorre attraverso la sezione del tubo corrisponde qui  $C$ .

Per una sbarra di sezione circolare (l'origine delle coordinate è presa nel centro della sezione) si ha

$$C = \frac{1}{4} (R^2 - x^2 - y^2).$$

#### Rigidità di torsione

$$C = \frac{\mu \pi R^4}{2}.$$

Si deduce per  $\psi$  dalle (16,10)  $\psi = \text{cost}$ . In virtù delle (16,4) a  $\psi$  costante corrisponde una traslazione della sbarra lungo l'asse  $z$ ; si potrà dunque porre  $\psi = 0$ ; le sezioni trasversali della sbarra circolare restano piane nella torsione.

2. Stesso problema per una sbarra a sezione ellittica, di semiassi  $a$  e  $b$ .

*Soluzione.* Rigidità di torsione

$$C = \pi \mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

La distribuzione degli spostamenti longitudinali è data dalla funzione di torsione

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy$$

(gli assi coordinati sono presi sugli assi dell'ellisse).

3. Stesso problema per una sbarra con sezione a triangolo equilatero (di lato  $a$ ).

*Soluzione.* Rigidità di torsione

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80} da^4.$$

#### Funzione di torsione

$$\psi = \frac{1}{6a} y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y),$$

l'origine è nel centro del triangolo, l'asse  $x$  è disposto lungo una delle altezze.

4. Stesso problema per una sbarra avente la forma di una lamina lunga e sottile (larghezza  $d$ , spessore  $h \ll d$ ).

*Soluzione.* Il problema è equivalente a quello dello scorrimento di un liquido viscoso entro pareti piane parallele:

$$C = \frac{\mu dh^3}{3}.$$

5. Stesso problema per un tubo cilindrico (raggio interno  $R_1$ , esterno  $R_2$ ).  
*Soluzione.* La funzione

$$\chi = \frac{1}{4} (R_2^2 - r^2)$$

(in coordinate polari) soddisfa la (16,13) sulle due frontiere della sezione anulare del tubo. Si trova con la (16,17)

$$C = \mu\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{2}.$$

6. Stesso problema per un tubo a parete sottile, di sezione arbitraria.

*Soluzione.* La parete del tubo è sottile, si può quindi ammettere che, lungo lo spessore  $h$ ,  $\chi$  vari da zero su una faccia a  $\chi_1$  sull'altra, secondo la legge lineare  $\chi = \chi_1 \frac{y}{h}$  ( $y$  è la coordinata secondo lo spessore della parete). Allora la (16,13)

dà  $\frac{\chi_1 L}{h} = S$ ,  $L$  è il perimetro della sezione del tubo,  $S$  l'area delimitata dal contorno. Il secondo termine nella (16,17) è piccolo rispetto al primo, quindi si ottiene

$$C = \frac{4hS^2\mu}{L}.$$

Se si taglia il tubo lungo una generatrice, la rigidità di torsione decresce notevolmente (conformemente al risultato del problema 4), divenendo

$$C = \frac{\mu L h^3}{3}.$$

### § 17. Flessione di sbarre

Quando si incurva una sbarra, alcune sue parti si allungano, altre si contraggono. Le linee della parte convessa della sbarra si allungano, quelle della parte concava si contraggono; come nel caso delle lame, vi è nella sbarra, secondo la lunghezza, una superficie « neutra », che non subisce né trazioni né compressioni. Essa separa le regioni della compressione da quelle della trazione.

Cominciamo studiando la deformazione di flessione in un piccolo tronco della sbarra, dove la flessione può considerarsi debole; intendiamo con ciò che insieme col tensore di deformazione debbono restare piccoli gli spostamenti assoluti della sbarra. Prendiamo un sistema di coordinate con origine sulla superficie « neutra », nel tronco in considerazione. L'asse  $z$  è diretto come la sbarra (non deformata); supponiamo che la flessione avvenga nel piano  $x, z$ <sup>1</sup>).

<sup>1)</sup> Quando la flessione della sbarra è debole, si può ritenere che avvenga in un piano; questo è fondato sul fatto ben noto in geometria differenziale, che la deviazione di una curva debolmente torta, a partire dal suo piano (la torsione della curva), è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto alla curvatura.

Così come per il caso della flessione delle lamine e torsione delle sbarre, nella flessione delle sbarre sottili le forze esterne che agiscono sulla superficie laterale della sbarra sono piccole rispetto agli sforzi nella sbarra stessa: questo permette di trascurarle quando si determinano le condizioni ai limiti su questa superficie. Dunque su tutta la superficie laterale della sbarra si ha  $\sigma_{ik}n_k = 0$  o, poiché  $n_z = 0$ ,

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0$$

e lo stesso per  $i = y, z$ . Prendiamo un punto del contorno della sezione trasversale della sbarra in cui la normale  $n$  sia parallela all'asse  $x$ . Un punto simile sta dalla parte opposta del contorno. In questi due punti  $n_y = 0$  e quindi si deduce  $\sigma_{xx} = 0$ . La sbarra è supposta sottile, quindi se  $\sigma_{xx}$  si annulla in punti siffatti della sezione è piccola in tutta la sezione e quindi in tutta la sbarra si può porre  $\sigma_{xx} = 0$ . Si verifica analogamente che, ad eccezione di  $\sigma_{zz}$ , tutte le componenti del tensore degli sforzi debbono annullarsi. Così, quando una sbarra è flessa, è grande solo la componente di trazione (o compressione) del tensore degli sforzi interni. Una deformazione in cui vi sia solo la componente  $\sigma_{zz}$  del tensore degli sforzi è una compressione semplice o una trazione semplice (vedi § 5). Così dunque ogni elemento di volume della sbarra flessa subisce una trazione (o compressione) semplice. La grandezza stessa di questa trazione è naturalmente differente nei diversi punti di ciascuna sezione trasversale, fatto questo che provoca la flessione della sbarra.

Si determina facilmente la grandezza dell'allungamento relativo in ogni punto. Consideriamo un elemento qualunque di lunghezza  $dz$  parallelo all'asse della sbarra e situato nell'intorno dell'origine. Nella flessione  $dz$  varia e diviene  $dz'$ . Restano invariati solo gli elementi di lunghezza situati sulla superficie neutra. Sia  $R$  il raggio di curvatura della superficie neutra nell'intorno dell'origine. Si può considerare che  $dz$  e  $dz'$  siano elementi d'arco di cerchi di raggio rispettivamente  $R$  e  $R + x$ ,  $x$  è il valore della corrispondente coordinata nel punto dove si è prescelto l'elemento  $dz'$ . Allora

$$dz' = \frac{R+x}{R} dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

L'allungamento relativo è dunque

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

D'altra parte l'allungamento relativo dell'elemento di lunghezza  $dz$  è uguale alla componente  $u_{zz}$  del tensore di deformazione e quindi

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \quad (17,1)$$

Si può scrivere  $\sigma_{zz}$  utilizzando direttamente la relazione  $\sigma_{zz} = Eu_{zz}$  che è valida nel caso di trazione semplice. Si ha

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \quad (17,2)$$

La disposizione della superficie « neutra » nella sbarra deformata è rimasta sin qui indeterminata. La si può definire partendo dalla condizione che la deformazione considerata sia una flessione pura, senza qualsivoglia trazione né compressione generale della sbarra. A tal fine occorre che la forza totale degli sforzi interni agenti sulla sezione trasversale della sbarra sia nulla, cioè che l'integrale

$$\int \sigma_{zz} df$$

preso su questa superficie sia nullo. Avendo in vista la (17,2), si ha

$$\int x df = 0. \quad (17,3)$$

D'altra parte, si può introdurre il concetto di centro di inerzia di una sezione della sbarra, in quanto centro di inerzia del disco piano omogeneo corrispondente a questa sezione. Le coordinate del centro di inerzia sono date da

$$\frac{\int x df}{\int df}, \quad \frac{\int y df}{\int df}.$$

Così, la (17,3) esprime la condizione che in un sistema di coordinate con origine sulla superficie neutra, la coordinata lungo l'asse  $x$  del centro di inerzia della sezione della sbarra sia nulla. Dunque la superficie « neutra » passa per i centri di inerzia delle sezioni trasversali della sbarra.

A parte  $u_{zz}$  si hanno ancora due componenti non nulle del tensore di deformazione, poiché in trazione semplice  $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$ . Noto il tensore di deformazione si trovano facilmente gli spostamenti dei punti. Scriviamo

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

L'integrazione di queste relazioni conduce alle seguenti espressioni delle componenti dello spostamento:

$$u_x = -\frac{1}{2R} [z^2 + \sigma(x^2 - y^2)],$$

$$u_y = -\sigma \frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \quad (17,4)$$

Le costanti di integrazione sono state prese nulle; questo significa che abbiamo fissato nello spazio la posizione dell'origine delle coordinate.

Le formule (17,4) mostrano che i punti situati sulla sezione trasversale  $z = \text{cost} \equiv z_0$  a seguito della flessione si portano sulla superficie:

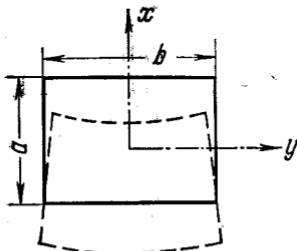


Fig. 14

$$z = z_0 + u_z = z_0 \left( 1 + \frac{x}{R} \right).$$

Si vede che in questa approssimazione le sezioni restano piane nel corso della flessione, ruotando soltanto di un certo angolo rispetto alla posizione iniziale. Ma la forma della sezione varia; così dopo la flessione di una sbarra rettangolare (di lati  $a$  e  $b$ ) i lati lunghi del contorno della sezione  $y = \pm b/2$  occupano le posizioni

$$y = \pm \frac{b}{2} + u_y = \pm \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{\sigma x}{R} \right),$$

cioè si piegano, pur restando rettilinei. I lati superiore e inferiore  $x = \pm a/2$  si curvano divenendo parabole:

$$x = \pm \frac{a}{2} + u_x = \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2R} \left[ z_0^2 + \sigma \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

(fig. 14).

L'energia libera dell'unità di volume della sbarra è

$$\frac{1}{2} \sigma_{th} u_{th} = \frac{1}{2} \sigma_{zz} u_{zz} = \frac{Ex^2}{2R^2}.$$

Integrando su tutta la sezione trasversale della sbarra, si ha

$$\frac{E}{2R^2} \int x^2 df, \quad (17,5)$$

che rappresenta l'energia libera dell'unità di lunghezza della sbarra flessa. Il raggio di curvatura  $R$  è qui definito come il raggio di curvatura della superficie « neutra ». Ma poiché la sbarra è sottile, la si può considerare, con uguale precisione, come il raggio della sbarra assimilata ad una curva (che si denomina « curva elastica »).

E comodo introdurre nella (17,5) la nozione di momento di inerzia della sezione trasversale della sbarra, cioè il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $y$ , contenuto nel piano di questa sezione è definito come

$$I_y = \int x^2 df \quad (17,6)$$

che non è altro che l'usuale momento di inerzia, dove ora, però, al posto dell'elemento di massa figura  $df$ . L'energia libera dell'unità di lunghezza può riscriversi

$$\frac{E}{2R^2} I_y. \quad (17,7)$$

Definiamo anche il momento delle forze degli sforzi agenti nella sezione data (lo si denoma come momento flettente). L'elemento d'area  $df$  della sezione subisce la forza  $\sigma_{zz} df = \frac{x}{R} E df$ , diretta lungo l'asse  $z$ . Il suo momento rispetto all'asse  $y$  è  $x\sigma_{zz} df$ . Allora, il momento totale relativo a questo asse è

$$M_y = \frac{E}{R} \int x^2 df = \frac{EI_y}{R}. \quad (17,8)$$

Quindi, la curvatura  $1/R$  della linea elastica è proporzionale al momento flettente che agisce nella sezione data.

La quantità  $I_y$  dipende dall'orientamento dell'asse  $y$  nel piano della sezione. Secondo l'uso corrente in meccanica, è comodo esprimere  $I_y$  per mezzo dei due momenti di inerzia principali. Se  $\theta$  è l'angolo tra l'asse  $y$  e uno degli assi principali di inerzia della sezione della sbarra, si sa che

$$I_y = I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta, \quad (17,9)$$

dove  $I_1$ ,  $I_2$  sono i momenti principali di inerzia. I piani passanti per l'asse  $z$  e gli assi di inerzia principali della sezione della sbarra sono detti piani principali di flessione.

Se, per esempio, la sezione della sbarra è rettangolare (di lati  $a$  e  $b$ ), il suo centro di inerzia è nel centro del rettangolo e gli assi principali di inerzia sono paralleli ai lati. I momenti principali di inerzia sono

$$I_1 = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_2 = \frac{a b^3}{12}. \quad (17,10)$$

Se la sezione è circolare, di raggio  $R$ , il centro di inerzia è nel centro del cerchio, gli assi di inerzia principali sono arbitrari. Il momento di inerzia attorno ad un asse diametrale qualunque è

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (17,11)$$

### § 18. Energia di una sbarra deformata

Nel paragrafo precedente abbiamo limitato il nostro studio ad un piccolo tronco longitudinale della sbarra flessa. Ora studieremo la deformazione nella sbarra intera e a tal fine converrà cominciare con l'operare una scelta adeguata del come descrivere tale deforma-

zione. Bisogna osservare che una flessione forte<sup>1)</sup> di una sbarra, in generale, è accompagnata da una certa deformazione di torsione, talché la deformazione risultante è la combinazione di una flessione pura e di una torsione.

Per descrivere la deformazione sarà opportuno procedere come segue. Dividiamo la sbarra in tronchi elementari per mezzo di sezioni trasversali infinitamente vicine. Muniamo ciascun tronco di un sistema di coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ , tutti questi sistemi avendo i loro rispettivi assi paralleli nella sbarra non deformata, con gli assi  $\zeta$  allineati lungo l'asse di questa. Nel corso della flessione i sistemi di coordinate girano, ed in generale girano in modi diversi; allora due sistemi infinitamente vicini si trovano ruotati l'uno rispetto all'altro di un certo angolo infinitesimo.

Sia  $d\varphi$  il vettore di rotazione relativa di due sistemi, distanti  $dl$  lungo la sbarra (si sa che l'angolo di rotazione infinitesimo può essere considerato come un vettore allineato lungo l'asse di rotazione; le sue componenti forniscono gli angoli di rotazione attorno a ciascuno dei tre assi coordinati).

Introdurremo per descrivere la deformazione il vettore

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dl} \quad (18,1)$$

che definisce la « velocità » di rotazione degli assi delle coordinate lungo la sbarra. Se la deformazione è una torsione pura, la rotazione dei sistemi di coordinate consecutivi si effettua soltanto attorno all'asse della sbarra, cioè agli assi  $\zeta$ . Allora il vettore  $\Omega$  è diretto lungo l'asse della sbarra e altro non è se non l'angolo di torsione  $\tau$ , utilizzato nel § 16. Nel caso generale, continueremo a denominare angolo di torsione la componente  $\Omega_\zeta$  di  $\Omega$ . Quando la sbarra effettua una flessione pura in un piano, il vettore  $\Omega$  non ha componente  $\Omega_\zeta$ , cioè in ogni punto è contenuto nel piano  $\xi, \eta$ . Se  $\xi, \zeta$  è il piano di flessione, la rotazione si effettua in ogni punto lungo l'asse  $\eta$ , cioè  $\Omega$  è parallelo a tale asse.

Introduciamo il versore  $t$  diretto lungo la tangente alla sbarra, considerata come « linea elastica ». La derivata  $\frac{dt}{dl}$  è, come si sa, il vettore di curvatura; in valore assoluto è uguale a  $\frac{1}{R}$ ,  $R$  è il raggio di curvatura<sup>2)</sup>, la sua direzione è quella della normale principale

<sup>1)</sup> Si ricordi che con flessione forte si intende una deformazione tale per cui il vettore  $u$  non sia piccolo mentre il tensore di deformazione sia, come sempre, piccolo.

<sup>2)</sup> Ricordiamo che una curva sghemba è caratterizzata in ogni punto dalla sua curvatura e dalla sua torsione. Non si dovrà confondere questa (di cui non faremo uso) con la deformazione di torsione della sbarra attorno al suo asse.

alla curva. Si sa anche che la variazione di un vettore in una rotazione infinitesima è uguale al prodotto vettoriale del vettore dell'angolo di rotazione per il vettore stesso. Ne consegue che si potrà scrivere la differenza tra i valori del vettore  $\mathbf{t}$  in due punti infinitamente vicini della linea elastica nella forma

$$d\mathbf{t} = [d\Omega \mathbf{t}]$$

ovvero, dividendo per  $dl$ ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = [\Omega \mathbf{t}]. \quad (18,2)$$

Moltiplicando vettorialmente per  $\mathbf{t}$  i due membri di tale uguaglianza, si ha

$$\Omega = \left[ \mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{dl} \right] + \mathbf{t} (\mathbf{t} \Omega). \quad (18,3)$$

La direzione della tangente coincide in ogni punto con quella dell'asse  $\zeta$  in questo stesso punto. Allora  $(\mathbf{t} \Omega) = \Omega_\zeta$ . Introducendo la normale principale  $\mathbf{n}$  (tale che  $\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \mathbf{n} \frac{1}{R}$ ), si potrà dunque scrivere

$$\Omega = \frac{1}{R} [\mathbf{tn}] + \mathbf{t} \Omega_\zeta. \quad (18,4)$$

A secondo membro si ha il primo termine che è un vettore di componenti  $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_\eta$ . D'altra parte è noto che  $[\mathbf{tn}]$  fornisce la binormale. Allora il vettore di componenti  $\Omega_\xi$  e  $\Omega_\eta$  è un vettore collineare alla binormale alla sbarra, di modulo  $\frac{1}{R}$ .

Avendo introdotto il vettore  $\Omega$  caratterizzante la deformazione e trovatene le proprietà, siamo ora in grado di dedurre l'espressione dell'energia elastica libera della sbarra flessa. L'energia elastica (per unità di lunghezza della sbarra) è una funzione quadratica della deformazione, cioè nel presente caso una funzione quadratica delle componenti di  $\Omega$ . Si vede facilmente che i termini proporzionali a  $\Omega_\xi \Omega_\zeta$  o a  $\Omega_\eta \Omega_\zeta$  non debbono apparire in questa forma quadratica. La sbarra è omogenea in tutta la sua lunghezza, quindi ogni grandezza, in particolare l'energia, non deve variare quando si inverte il segno di  $\zeta$ , cioè nello scambio  $\zeta \rightarrow -\zeta$ . I prodotti suddetti cambiano segno in questa trasformazione.

Relativamente al termine  $\Omega_\zeta^2$ , ricordiamo che, per  $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$ , si deve avere una torsione pura e quindi l'espressione dell'energia deve ridursi a quella dedotta nel § 16. Quindi il termine corrispondente nell'energia libera ha la forma

$$\frac{C \Omega_\zeta^2}{2}.$$

Infine i termini quadratici in  $\Omega_\xi$  e  $\Omega_\eta$  possono essere scritti a partire dall'espressione (17,7) per l'energia di un piccolo tronco della sbarra debolmente flesso. Supponiamo che la sbarra sia sottoposta esclusivamente ad una flessione debole. Scegliamo il piano  $\xi$ ,  $\zeta$  come piano in cui avviene la flessione in modo tale che  $\Omega_\xi$  scompare. Anche la torsione manca quando la flessione è debole. In questo caso l'espressione per l'energia deve ridursi alla forma (17,7):

$$\frac{E}{2R^2} I_\eta.$$

Ora, si è visto che  $\frac{1}{R^2}$  è proprio il quadrato di un vettore piano ( $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_\eta$ ). Allora l'energia si può scrivere nella forma

$$\frac{E}{2} I_\eta \Omega_\eta^2.$$

Con assi arbitrari  $\xi$ ,  $\eta$ , questa espressione diviene

$$\frac{E}{2} (I_{\eta\eta} \Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi} \Omega_\eta \Omega_\xi + I_{\xi\xi} \Omega_\xi^2),$$

dove  $I_{\eta\eta}$ ,  $I_{\eta\xi}$ ,  $I_{\xi\xi}$  sono le componenti del tensore di inerzia della sezione della sbarra. Torna utile prendere gli assi  $\xi$  ed  $\eta$  come assi principali di inerzia della sezione della sbarra. Allora si ha più semplicemente

$$\frac{E}{2} (I_1 \Omega_\xi^2 + I_2 \Omega_\eta^2),$$

$I_1$  e  $I_2$  essendo i momenti di inerzia principali. Poiché i coefficienti di  $\Omega_\xi^2$  e  $\Omega_\eta^2$  sono costanti, l'espressione dedotta sussiste anche nella flessione forte.

Infine, integrando su tutta la lunghezza della sbarra, si ottiene l'espressione per l'energia elastica libera della sbarra flessa

$$F_{sb} = \int \left\{ \frac{I_1 E}{2} \Omega_\xi^2 + \frac{I_2 E}{2} \Omega_\eta^2 + \frac{C}{2} \Omega_\xi^2 \right\} dl. \quad (18,5)$$

Esprimiamo, per il tramite di  $\mathbf{\Omega}$ , il momento delle forze agenti sulla sezione della sbarra. Si perviene facilmente a questo utilizzando nuovamente i risultati precedentemente ottenuti nei casi di torsione pura e flessione debole pura. In torsione pura il momento delle forze rispetto all'asse della sbarra è  $C\tau$ . Se ne deduce quindi che, nel caso generale, il momento  $M_\xi$  rispetto all'asse  $\xi$  deve essere uguale a  $C\Omega_\xi$ . Poi, in flessione debole nel piano  $\xi$ ,  $\zeta$  il momento rispetto all'asse  $\eta$  è  $\frac{EI_2}{R}$ . In una flessione siffatta  $\mathbf{\Omega}$  è diretto lungo  $\eta$ , la curvatura  $1/R$  è semplicemente uguale al suo modulo, e  $\frac{EI_2}{R} =$

$= EI_2\Omega$ . Ne consegue che si deve avere nel caso generale  $M_\xi = = EI_1\Omega_\xi$ ,  $M_\eta = EI_2\Omega_\eta$  (gli assi  $\xi$ ,  $\eta$  sono coincidenti con gli assi principali di inerzia della sezione). Allora per le componenti del momento delle forze  $M$  si ha

$$M_\xi = EI_1\Omega_\xi, \quad M_\eta = EI_2\Omega_\eta, \quad M_\zeta = C\Omega_\zeta. \quad (18.6)$$

L'energia elastica (18.5), espressa per mezzo del momento delle forze, diviene

$$F_{sb} = \int \left\{ \frac{M_\xi^2}{2I_1E} + \frac{M_\eta^2}{2I_2E} + \frac{M_\zeta^2}{2C} \right\} dl. \quad (18.7)$$

Un caso importante di flessione è la flessione debole quando la sbarra si sposta di poco dalla sua posizione iniziale su tutta la sua lunghezza rispetto alla lunghezza stessa. In questo caso la torsione può essere ignorata, e si può porre  $\Omega_\zeta = 0$ , col che la (18.4) si riduce a

$$\Omega = \frac{1}{R} [\text{tn}] = \left[ t \frac{dt}{dl} \right]. \quad (18.8)$$

Introduciamo un sistema di coordinate fisso nello spazio,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , con l'asse  $z$  coincidente con l'asse della sbarra non deformata (al posto del sistema  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  solidale in ogni punto alla sbarra). Indichiamo con  $X$ ,  $Y$  le coordinate  $x$ ,  $y$  dei punti della curva elastica della sbarra;  $X$  e  $Y$  definiscono lo spostamento dei punti della curva rispetto alla posizione iniziale prima della flessione.

Poiché la flessione è debole, la tangente  $t$  è quasi parallela all'asse  $z$  e quindi la si potrà considerare diretta approssimativamente lungo quest'asse. Peraltro, poiché  $t = \frac{dr}{dl}$ , si ha

$$\frac{dt}{dl} = \frac{d^2r}{dl^2} \approx \frac{d^2r}{dz^2}$$

(la derivata rispetto alla lunghezza della sbarra può essere approssimativamente sostituita alla derivata rispetto a  $z$ ). Chiaramente le componenti lungo  $x$  e  $y$  di questo vettore sono uguali a  $\frac{d^2X}{dz^2}$  e  $\frac{d^2Y}{dz^2}$ . Le componenti  $\Omega_\xi$ ,  $\Omega_\eta$  possono, con la stessa precisione, essere poste uguali a  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ , quindi dalla (18.8) segue:

$$\Omega_\xi = -\frac{d^2Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2X}{dz^2}. \quad (18.9)$$

Sostituendo queste espressioni nella (18.5), si ottiene l'energia elastica della sbarra debolmente flessa nella forma

$$F_{sb} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left( \frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 + I_2 \left( \frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 \right\} dz. \quad (18.10)$$

Ricordiamo che  $I_1$ ,  $I_2$  sono i momenti di inerzia rispetto agli assi  $x$  e  $y$  che sono assi principali.

Nel caso di una sbarra circolare si ha  $I_1 = I_2 = I$  e sotto l'integrale resta la somma dei quadrati delle derivate seconde che è, nell'approssimazione sin qui accettata, il quadrato del raggio di curvatura:

$$\left( \frac{d^2X}{dz^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2Y}{dz^2} \right)^2 \approx \frac{1}{R^2}.$$

La formula (18,10) si estende al caso della flessione debole di una sbarra (di sezione circolare), di forma qualunque nello stato naturale (non deformata). Si scriverà a tal fine l'energia di flessione nella forma

$$F_{sb} = \frac{EI}{2} \int \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 dz, \quad (18,11)$$

$R_0$  essendo il raggio di curvatura naturale in ogni punto della sbarra. Questa espressione ha, come ci si attende, un minimo nello stato indeformato ( $R = R_0$ ) e si riduce alla (18,10) quando  $R_0 \rightarrow \infty$ .

### § 19. Equazioni di equilibrio delle sbarre

Siamo ora in grado di dedurre le equazioni di equilibrio di sbarre curve. Consideriamo di nuovo un tronco elementare qualunque di sbarra delimitato da due sezioni infinitamente vicine e calcoliamo la risultante delle forze che agiscono su tale tronco. Denominiamo con  $\mathbf{F}$  la forza degli sforzi interni applicati alla sezione della sbarra<sup>1)</sup>. Le componenti di questo vettore sono uguali agli integrali di  $\sigma_{iz}$  sulla sezione:

$$F_i = \int \sigma_{iz} df. \quad (19,1)$$

Consideriamo le due sezioni infinitamente vicine come basi dell'elemento interessato; allora  $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$  è la forza agente sulla base superiore,  $-\mathbf{F}$  quella agente sulla base inferiore e  $d\mathbf{F}$  la loro somma. Sia poi  $\mathbf{K}$  la forza esterna agente sull'unità di lunghezza della sbarra; l'elemento  $dl$  è così sottoposto alla forza  $\mathbf{K} dl$ . La risultante di tutte le forze agenti su questo elemento è dunque  $d\mathbf{F} + \mathbf{K} dl$ . Questa forza all'equilibrio deve annullarsi, quindi

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\mathbf{K}. \quad (19,2)$$

La seconda equazione si deduce dalla richiesta di annullamento del momento risultante delle forze applicate all'elemento. Sia  $\mathbf{M}$  il momento delle forze degli sforzi interni agenti sulla sezione; questo momento è preso rispetto ad un punto (l'origine) contenuto nel piano della sezione, le sue componenti sono definite dalle (18,6). Calcoliamo il momento risultante applicato all'elemento considerato

<sup>1)</sup> La notazione  $\mathbf{F}$  di questa forza non può generare confusioni con l'energia libera, che non interverrà nel seguito (§§. 19-21).

rispetto ad un punto (diciamolo  $O$ ) situato nella base superiore. Allora gli sforzi interni agenti su questa base danno  $M + dM$ . Per quanto concerne il momento (rispetto ad  $O$ ) degli sforzi interni sulla base inferiore dell'elemento, questo è composto del momento  $-M$  degli sforzi rispetto all'origine (punto  $O'$ ) e del momento (rispetto ad  $O$ ) della risultante  $-F$  delle forze agenti su tale base. Questo secondo momento è  $[(-dl)(-F)]$ , ove  $dl$  è il vettore dell'elemento di lunghezza della sbarra diretto da  $O'$  verso  $O$ . Il momento dovuto alle forze esterne  $K$  è un infinitesimo di ordine superiore, il momento risultante agente sull'elemento è  $dM + [dF]$ . All'equilibrio deve avversi

$$dM + [dF] = 0.$$

Dividendo per  $dl$  e osservando che  $\frac{dl}{dl} = t$  è versore tangente alla sbarra (considerata come curva geometrica) si ha

$$\frac{dM}{dl} = [Ft]. \quad (19,3)$$

Le (19,2), (19,3) costituiscono il sistema completo delle equazioni di equilibrio di una sbarra arbitrariamente incurvata.

Se le forze esterne che agiscono sulla sbarra sono forze concentrate, cioè applicate in punti isolati, le equazioni di equilibrio si semplificano considerevolmente negli intervalli compresi tra i punti di applicazione di tali forze. Quando  $K = 0$ , la (19,2) dà

$$F = \text{cost}, \quad (19,4)$$

cioè gli sforzi interni sono costanti lungo la lunghezza di ciascuno dei tronchi in questione. Per fissare i valori di queste costanti, si osservi che la differenza  $F_2 - F_1$  dei valori della forza in due punti 1 e 2 è uguale a

$$F_2 - F_1 = -\sum K, \quad (19,5)$$

dove la somma è estesa a tutte le forze applicate al tronco che va dal punto 1 al punto 2. Notiamo che in  $F_2 - F_1$  il punto 2 è quello più distante dall'origine delle lunghezze (cioè dell'arco  $l$ ). Questa osservazione è essenziale nella determinazione dei segni nella (19,5). Chiaramente se la sbarra è sottoposta ad una forza concentrata  $f$  agente su un'estremità libera,  $F$  è costante su tutta la sbarra, ed è uguale ad  $f$ .

Anche la seconda equazione di equilibrio (19,3) si semplifica. Scrivendo  $t = \frac{dl}{dl} = \frac{dr}{dl}$  ( $r$  è il raggio vettore spiccato da un punto fissato ad un punto arbitrario della sbarra) e integrando, si ha (essendo  $F$  costante)

$$M = [Fr] + \text{cost}. \quad (19,6)$$

Se non vi sono forze concentrate e la sbarra è sottoposta soltanto a momenti concentrati (cioè a coppie di forze concentrate) è  $\mathbf{F} = \text{cost}$  lungo tutta la sbarra ed  $\mathbf{M}$  subisce nei punti di applicazione delle coppie concentrate salti pari ai momenti di queste.

Consideriamo ora la questione delle condizioni ai limiti, alle estremità della sbarra. Si presentano diversi casi.

Un estremo della sbarra è detto incastrato (fig. 4, a, pag. 64) se non è suscettibile di spostamenti, né longitudinali né laterali, e se inoltre la tangente alla sbarra in questo estremo non può variare. In tal caso le condizioni ai limiti consistono nel fissare i valori delle coordinate dell'estremo e del versore tangente  $\mathbf{t}$  in questo punto. La forza ed il momento della reazione si ottengono risolvendo le equazioni di equilibrio.

Un altro caso è quello in cui la sbarra è libera in un suo estremo che ha coordinate e direzione arbitrarie. Le condizioni ai limiti si esprimono nel fatto che la forza  $\mathbf{F}$  ed il momento delle forze  $\mathbf{M}$  sono ivi nulli<sup>1)</sup>.

Se l'estremità della sbarra è articolata, questa non può spostarsi, ma può variare di direzione. Il momento delle forze che agiscono su tale estremità che può ruotare liberamente è nullo.

Se infine la sbarra è poggiata in un punto (vedi fig. 4, b), essa può scivolare ma non può spostarsi trasversalmente. La direzione di  $\mathbf{t}$  e la posizione del punto d'appoggio della sbarra non sono allora dati; il momento delle forze nel punto d'appoggio deve essere nullo, poiché la sbarra può ruotare liberamente, e la forza  $\mathbf{F}$  deve essere perpendicolare alla sbarra, perché una componente longitudinale continuerebbe a far slittare la sbarra sul suo punto d'appoggio.

Sarebbe facile continuare a stabilire nello stesso modo le condizioni ai limiti per altri tipi di vincolo per la sbarra, ma ci limiteremo ai casi indicati.

Abbiamo già detto all'inizio del precedente paragrafo che una flessione forte di una sbarra di sezione arbitraria comporta in generale una torsione, anche in assenza di momenti di torsione. Fa eccezione il caso in cui la flessione avviene nei suoi piani principali; in tale circostanza la torsione è assente. Una sbarra di sezione circolare si piega senza torcersi (ovviamente in assenza di momenti di torsione). È facile convincersene; la torsione è determinata dalla componente  $\Omega_t = (\Omega \mathbf{t})$  del vettore  $\Omega$ ; calcoliamone la derivata rispetto alla lunghezza della sbarra. Notiamo che  $\Omega_t = \frac{M_t}{C}$ , quindi

$$\frac{d}{dl} (\mathbf{M} \mathbf{t}) = C \frac{d\Omega_t}{dl} = \frac{d\mathbf{M}}{dl} \mathbf{t} + \mathbf{M} \frac{dt}{dl}.$$

<sup>1)</sup> Se all'estremità libera è applicata una forza  $\mathbf{f}$ , la condizione al limite per  $\mathbf{F}$  diviene ovviamente  $\mathbf{F} = \mathbf{f}$ .

Sostituendo la (19,3), il primo termine del terzo membro è zero, talché

$$C \frac{d\Omega_\xi}{dl} = M \frac{dt}{dl}.$$

Per una sbarra circolare  $I_1 = I_2 \equiv I$ ; in virtù delle (18,3), (18,6), si può scrivere per  $M$

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] + t C \Omega_\xi. \quad (19,7)$$

Moltiplicando per  $\frac{dt}{dl}$  i due termini si annullano e quindi

$$\frac{d\Omega_\xi}{dl} = 0,$$

pertanto

$$\Omega_\xi = \text{cost.} \quad (19,8)$$

Resta così dimostrato che l'angolo di torsione è costante lungo la sbarra. In assenza di momenti torcenti alle estremità,  $\Omega_\xi$  è nullo e, quindi, come si era annunciato, è nulla ovunque la torsione.

Per una sbarra circolare in flessione pura si può scrivere

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] = EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^2r}{dl^2} \right]. \quad (19,9)$$

Sostituendo questa espressione nella (19,3), si ottiene l'equazione della flessione pura delle sbarre di sezione circolare nella forma

$$EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^3r}{dl^3} \right] = \left[ F \frac{dr}{dl} \right]. \quad (19,10)$$

### P R O B L E M I

1. Ricondurre a quadrature il problema della determinazione della forma di una sbarra circolare (verga elastica), fortemente flessa in un piano, sotto l'effetto di forze concentrate.

*Soluzione.* Consideriamo un tronco di sbarra tra due punti di applicazione delle forze; su un tale tronco  $F = \text{cost.}$  Prendiamo il piano della flessione come piano  $x, y$  e l'asse  $y$  parallelo ad  $F$ . Sia  $\theta$  l'angolo tra la tangente alla sbarra e l'asse  $y$ . Allora  $\frac{dx}{dl} = \sin \theta$ ,  $\frac{dy}{dl} = \cos \theta$ ,  $x$  e  $y$  essendo le coordinate dei punti della sbarra. Sviluppando i prodotti vettoriali nella (19,10), si ottiene l'equazione di  $\theta$  come funzione della lunghezza dell'arco  $l$ :

$$IE \frac{d^2\theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0.$$

Una prima integrazione fornisce

$$\frac{IE}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = c_1,$$

quindi

$$l = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + c_2. \quad (1)$$

La funzione  $\theta(l)$  può essere espressa per mezzo di funzioni ellittiche. Per le coordinate  $x = \int \sin \theta dl$ ,  $y = \int \cos \theta dl$  si ha

$$x = \pm \frac{1}{F} \sqrt{2IE} \sqrt{c_1 - F \cos \theta} + \text{cost},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{IE}{2}} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{c_1 - F \cos \theta}} + \text{cost}. \quad (2)$$

Il momento  $M$  (19,9) è diretto come  $z$  e vale

$$M = IE \frac{d\theta}{dl}.$$

2. Trovare la forma di una sbarra fortemente flessa, con una delle sue estremità incastrata, l'altra libera, sottoposta all'azione di una forza  $f$  normale alla direzione della sbarra non deformata (fig. 15).

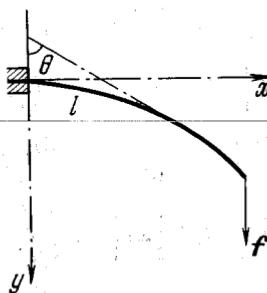


Fig. 15

*Soluzione.*  $F = \text{cost} = f$  lungo tutta la sbarra. Nell'estremità incastrata ( $l = 0$ )  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e nell'estremità libera ( $l = L$ , ove  $L$  è la lunghezza della sbarra)  $M = 0$ , cioè  $\theta' = 0$ . Introducendo la notazione  $\theta_0 = \theta(L)$ , si ha nella (1)  $c_1 = f \cos \theta_0$ :

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Se ne deduce l'equazione che determina  $\theta_0$

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

La forma della sbarra è data dalle

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{\cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

3. Stesso problema con  $f$ , forza applicata all'estremità libera, parallela alla direzione della sbarra non deformata.

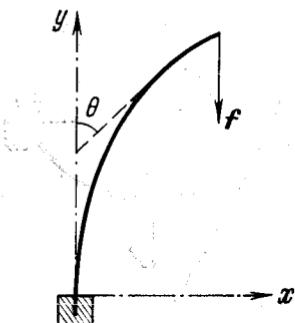


Fig. 16

*Soluzione.* Si ha  $F = -f$  (gli assi sono scelti come nella fig. 16). Condizioni ai limiti:  $\theta = 0$  per  $l = 0$ ,  $\theta' = 0$  per  $l = L$ . Si ha

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

dove  $\theta_0 = \theta(L)$  si deduce da

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Si ottiene per  $x$  e  $y$

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{1 - \cos \theta_0} - \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}),$$

$$y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Se la flessione è debole,  $\theta_0 \ll 1$ , si può scrivere

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{f}},$$

cioè  $\theta_0$  scompare da questa soluzione. Questo mostra che, in accordo con i risultati generali del problema 3, § 21, la soluzione ricercata esiste solo se  $f \geq \frac{\pi^2 IE}{4L^2}$ , quando la stabilità della configurazione rettilinea è svanita.

4. Stesso problema; le estremità sono incastrate, la sbarra è sottoposta ad una forza  $f$  nel suo punto di mezzo. La lunghezza della sbarra tra i punti di appoggio è  $L_0$ .

*Soluzione.* Scegliamo gli assi come nella fig. 17. La forza  $F$  è costante su ciascuno dei due tronchi  $AB$  e  $BC$  e su ciascuno di questi è normale alla sbarra

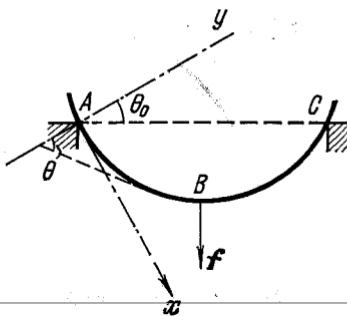


Fig. 17

nei punti di appoggio, che sono rispettivamente  $A$  e  $C$ . La differenza tra i valori di  $F$  su  $AB$  e su  $BC$  è uguale ad  $f$ , quindi ne consegue che  $F \sin \theta_0 = -\frac{f}{2}$  su  $AB$ ,  $\theta_0$  essendo l'angolo tra l'asse  $y$  e la linea  $AC$ . In  $A$  ( $l = 0$ ) si hanno le condizioni  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $M = 0$ , cioè  $\theta' = 0$ , talché su  $AB$

$$l = \sqrt{\frac{IE}{f}} \sqrt{\sin \theta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}, \quad x = 2 \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \sqrt{\cos \theta},$$

$$y = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta.$$

L'angolo  $\theta_0$  è determinato dalla condizione che la proiezione dell'arco  $AB$  sulla retta  $AC$  sia  $\frac{L_0}{2}$ ; se ne deduce

$$\frac{L_0}{2} = \sqrt{\frac{IE \sin \theta_0}{f}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

La derivata  $\frac{df}{d\theta_0}$  ( $f$  è considerata come funzione di  $\theta_0$ ) si annulla e diviene quindi positiva per un certo valore di  $\theta_0$ , compreso tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ ; se  $\theta_0$  continua a decrescere (crescendo la freccia),  $f$  decresce. Questo significa che la soluzione ottenuta diviene instabile, la sbarra si incurva tra i sostegni.

5. Ricondurre a quadrature il problema della flessione forte sghemba di una sbarra sottoposta a forze concentrate.

*Soluzione.* Consideriamo un tronco di sbarra tra i punti di applicazione delle forze, dove  $F = \text{cost}$ . Integrando la (19,10) si ha

$$EI \left[ \frac{dr}{dl} \frac{d^2r}{dl^2} \right] = [\mathbf{Fr}] + c\mathbf{F}. \quad (1)$$

La costante d'integrazione è scritta nella forma di un vettore  $c\mathbf{F}$  collineare con  $\mathbf{F}$ , poiché, con un'opportuna scelta dell'origine, cioè aggiungendo ad  $r$  un certo vettore costante, si può fare scomparire un vettore additivo, perpendicolare ad  $\mathbf{F}$ . Prendendo il prodotto scalare e vettoriale della (1) con  $r'$  (l'apice sta ad indicare la derivazione rispetto ad  $l$ ) ed osservando che  $r'r'' = 0$  (poiché  $r'^2 = 1$ ), si ha

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}'r'] + c\mathbf{Fr}' = 0, \quad EI r'' = [[\mathbf{Fr}]r'] + c[\mathbf{Fr}'].$$

In coordinate cartesiane (asse  $z$  lungo  $\mathbf{F}$ )

$$(xy' - yx') + cz' = 0, \quad EI z'' = -F(xx' + yy').$$

Introducendo coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$ , si ha

$$r^2\varphi' + cz' = 0, \quad EI z'' = -Fr'r'. \quad (2)$$

La seconda equazione dà

$$z' = \frac{F}{2EI} (A - r^2), \quad (3)$$

ove  $A$  è una costante. Combinando le (2), (3), con l'identità

$$r'^2 + r^2\varphi'^2 + z'^2 = 1,$$

si ottiene

$$dl = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - (r^2 + c^2)(A - r^2)^2 \frac{F^2}{4E^2I^2}}},$$

dopodiché dalle (2) e (3) si deduce

$$z = \frac{F}{2EI} \int \frac{(A - r^2)r dr}{\sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2}},$$

$$\varphi = -\frac{cF}{2EI} \int \frac{(A - r^2) dr}{r \sqrt{r^2 - \frac{F^2}{4E^2I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2}}$$

che determinano la forma della sbarra curvata.

6. Una sbarra di sezione circolare è sottoposta a torsione (angolo di torsione  $\tau$ ) e curvata ad elica. Determinare la forza ed il momento delle forze che debbono essere applicate alle estremità della sbarra per mantenerla in tale stato.

*Soluzione.* Sia  $R$  il raggio del cilindro su cui è avvolta l'elica (asse  $z$  come asse del cilindro),  $\alpha$  l'angolo formato dalla tangente col piano  $xOy$ . Il passo dell'elica si esprime tramite  $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$ . L'equazione dell'elica è

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg} \alpha$$

( $\varphi$  è l'angolo di rotazione attorno a  $z$ ). L'elemento d'arco è  $dl = \frac{R}{\cos \alpha} d\varphi$ ; sostituendo queste espressioni nella (19,7), calcoliamo le componenti di  $M$ , quindi, tramite la (19,3), la forza  $F$  (costante lungo tutta la sbarra). Si trova infine che  $F$  è diretta lungo  $z$  ed ha intensità

$$F_z = F = C\tau \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{EI}{R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Il momento  $M$  ha una componente lungo  $z$

$$M_z = C\tau \sin \alpha + \frac{EI}{R} \cos^3 \alpha$$

e una componente  $M_\varphi$  diretta in ogni punto della sbarra come la tangente alla circonferenza della sezione trasversale del cilindro:  $M_\varphi = FR$ .

7. Trovare la figura d'equilibrio di un filo elastico (con resistenza alla flessione trascurabile, confrontata con quella opposta alla trazione) sospeso nel campo di gravità per due punti.

*Soluzione.* Il piano  $x, y$  è il piano del filo, l'asse  $y$  l'asse verticale diretto verso il basso. Si può trascurare  $\frac{dM}{dl}$  nella (19,3) poiché  $M$  è proporzionale a  $EI$ . Allora  $[Ft] = 0$ , cioè  $F$  è in ciascun punto collineare a  $t$ :  $F = Ft$ . L'equazione (19,2) dà ora  $\frac{d}{dl} \left( F \frac{dx}{dl} \right) = 0$ ,  $\frac{d}{dl} \left( F \frac{dy}{dl} \right) = q$ , dove  $q$  è il peso del filo per unità di lunghezza, e quindi  $F \frac{dx}{dl} = c$ ,  $F \frac{dy}{dl} = ql$ . Se ne deduce  $F = \sqrt{c^2 + ql^2}$  e quindi

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(con  $A = \frac{c}{q}$ ). Integrando

$$x = A \operatorname{Arsh} \frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2}$$

da cui segue

$$y = A \operatorname{ch} \frac{x}{A},$$

che è l'equazione della catenaria. La scelta dell'origine e della costante  $A$  è assegnata dai due punti di sospensione e dalla lunghezza del filo.

### § 20. Flessione debole di una sbarra

Le equazioni di equilibrio si semplificano notevolmente nel caso di rilevanza pratica in cui la flessione della sbarra sia debole. Parleremo più precisamente di flessione debole allorché il vettore tangente  $t$  varia lentamente secondo la lunghezza della sbarra, cioè se  $\frac{dt}{dl}$  è piccolo. In altri termini, il raggio di curvatura della

sbarra piegata deve essere, in ogni punto, grande rispetto alla sua lunghezza. Come conseguenza la flessione che la sbarra subisce risulta piccola rispetto alla sua lunghezza. Ma osserviamo che qui non si richiede che la flessione sia piccola rispetto allo spessore, come avevamo imposto nella teoria approssimata della flessione debole delle lamine (vedi §§ 11 e 12)<sup>1)</sup>.

Si derivi la (19,3) rispetto ad  $l$ :

$$\frac{d^2M}{dl^2} = \left[ \frac{dF}{dl} t \right] + \left[ F \frac{dt}{dl} \right]. \quad (20,1)$$

Il secondo termine, che contiene la quantità piccola  $\frac{dt}{dl}$ , è di solito omesso (fanno eccezione alcuni casi che esamineremo separatamente più avanti). Sostituendo nel primo termine  $\frac{dF}{dl} = -K$ , si ottiene l'equazione di equilibrio nella forma

$$\frac{d^2M}{dl^2} = [tK]. \quad (20,2)$$

Scriviamo l'equazione secondo le componenti, utilizzando le (18,6), (18,9):

$$M_x = -EI_1 Y'', \quad M_y = EI_2 X'', \quad M_z = 0 \quad (20,3)$$

(il segno di derivazione è rispetto a  $z$ ). Si suppone  $t$  allineato con l'asse  $z$ ; allora dalla (20,2) si ha

$$EI_2 X''' - K_x = 0, \quad EI_1 Y''' - K_y = 0. \quad (20,4)$$

Queste equazioni determinano le frecce  $X$  ed  $Y$  in funzione di  $z$ , cioè la forma della sbarra debolmente flessa.

Per quanto riguarda la forza  $F$  degli sforzi interni, che agisce su una sezione trasversale, questa può essere espressa mediante le derivate di  $X$  e  $Y$ . Sostituendo la (20,3) nella (19,3) si ha

$$F_x = -EI_2 X'', \quad F_y = -EI_1 Y''. \quad (20,5)$$

Si vede che le derivate seconde determinano il momento delle forze degli sforzi interni, le derivate terze le forze stesse. La forza (20,5) è detta *sforzo di taglio*. Se la flessione è dovuta a forze concentrate, lo sforzo di taglio è costante su ogni tronco definito dai punti di applicazione delle forze ed ha in ognuno di tali punti una discontinuità pari al valore della forza esterna applicata.

<sup>1)</sup> Non esporremo qui la teoria della flessione per sbarre che nello stato naturale sono curvate, limitandoci agli esempi semplici che vengono esposti nei problemi 8 e 9, alla fine del paragrafo.

Le quantità  $EI_2$  ed  $EI_1$  sono dette rigidità alla flessione rispettivamente nei piani  $x$ ,  $z$  e  $y$ ,  $z$ <sup>1)</sup>.

Se le forze applicate alla sbarra agiscono in un piano, anche la flessione avviene in un piano, ma in generale questi due piani non coincidono; determiniamo l'angolo che formano. Sia  $\alpha$  l'angolo tra il piano delle forze ed il primo piano principale di flessione (piano  $x$ ,  $z$ ). Le equazioni di equilibrio si riscrivono

$$X''' = \frac{\cos \alpha}{I_2 E} K, \quad Y''' = \frac{\sin \alpha}{I_1 E} K.$$

Le due equazioni differiscono solo per il coefficiente di  $K$ , quindi  $X$  ed  $Y$  sono proporzionali

$$Y = X \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

L'angolo  $\theta$  tra il piano di flessione ed il piano  $x$ ,  $z$  è definito da

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (20,6)$$

Nel caso di una sbarra di sezione circolare  $I_1 = I_2$ ,  $\alpha = \theta$ , cioè la flessione avviene nel piano d'azione delle forze. Lo stesso avviene per una sbarra di sezione arbitraria, quando  $\alpha = 0$ , cioè se le forze giacciono nel piano principale. Per la grandezza della freccia

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

si ha l'equazione

$$EI\zeta''' = K, \quad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (20,7)$$

<sup>1)</sup> In determinate condizioni ai limiti la flessione di una lamina sottile è ugualmente descritta da un'equazione del tipo

$$DX'' - K_x = 0. \quad (20,4a)$$

Si consideri una lamina rettangolare (di lati  $a$ ,  $b$  e spessore  $h$ ) fissata lungo i lati  $a$  (paralleli all'asse  $y$ ) e piegata secondo i lati  $b$  (asse  $z$ ) da un carico uniforme lungo l'asse  $y$ . Nel caso generale in cui  $a$  e  $b$  sono arbitrari, la flessione della lamina è determinata dall'equazione bidimensionale (12,5) con le condizioni al contorno corrispondenti sui bordi incastrati e sui bordi liberi. Nel caso limite  $a \gg b$  si può considerare la deformazione uniforme lungo  $y$ , e l'equazione dell'equilibrio a due dimensioni si riduce ad un'equazione della forma (20,4a) dove il coefficiente di rigidità è dato da

$$D = \frac{Eh^3 a}{12(1-\sigma^2)}.$$

L'equazione (20,4a) è valida anche nel caso limite opposto  $a \ll b$ , la lamina venendo assimilata ad una sbarra di lunghezza  $b$  e sezione rettangolare (lati  $a$  ed  $h$ ); corrispondentemente

$$D = EI_2 = \frac{Eh^3 a}{12}.$$

Lo sforzo di taglio  $F$  è contenuto nello stesso piano di  $K$  e vale

$$F = -EI\zeta''. \quad (20,8)$$

La quantità  $I$  gioca il ruolo di « valore efficace » del momento d'inerzia della sezione della sbarra.

Scriviamo esplicitamente le condizioni ai limiti per le equazioni di equilibrio di una sbarra debolmente flessa. Se la sbarra ha un'estremità incastrata, si avrà  $X = Y = 0$  e inoltre  $X' = Y' = 0$  (tangente invariabile). Dunque le condizioni sono

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \quad (20,9)$$

Per quanto concerne la forza ed il momento delle forze di reazione nei punti d'appoggio, questi sono definiti, nota la soluzione, tramite le (20,3) e (20,5).

Quando la flessione è abbastanza debole, per quanto concerne le condizioni ai limiti, le situazioni di appoggio puntuale e di articolazione sono equivalenti. Nel primo caso lo spostamento longitudinale del punto d'appoggio della sbarra è una grandezza del secondo ordine rispetto alla freccia e può quindi essere trascurato. Allora le condizioni di annullamento dello spostamento trasversale e del momento delle forze si scrivono

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \quad (20,10)$$

Per la direzione dell'estremità della sbarra e la forza di reazione all'appoggio, esse si determinano risolvendo le equazioni.

Infine, nel caso di estremo libero, devono essere ivi nulle sia la forza  $F$  che il momento delle forze  $M$ . Come conseguenza delle (20,3) e (20,5), questo implica

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \quad (20,11)$$

(se c'è una forza concentrata applicata all'estremo libero,  $F$  non è nulla, ma uguale a questa forza).

Non è difficile estendere le equazioni (20,4) al caso di sbarre di sezione variabile. In questo caso i momenti d'inerzia sono funzioni di  $z$ . Le formule (20,3), che determinano i momenti delle forze in ogni sezione data, restano immutate. Sostituendole nella (20,2) si perviene a

$$E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_1 \frac{d^2Y}{dz^2} \right) = K_y, \quad E \frac{d^2}{dz^2} \left( I_2 \frac{d^2X}{dz^2} \right) = K_x \quad (20,12)$$

in cui  $I_1$  e  $I_2$  non possono essere portati fuori del segno di derivata. Per quanto riguarda lo sforzo di taglio, si ha

$$F_x = -E \frac{d}{dz} \left( I_2 \frac{d^2X}{dz^2} \right), \quad F_y = -E \frac{d}{dz} \left( I_1 \frac{d^2Y}{dz^2} \right). \quad (20,13)$$

Torniamo alle equazioni (20,1). Anche nel caso della flessione debole possono sussistere circostanze in cui l'omissione del secondo termine nel secondo membro risulti illegittima. Ciò avviene quando

la forza degli sforzi interni che agisce lungo la sbarra è notevole, ovverosia  $F_z$  è grande. Una forza siffatta si origina generalmente quando sulle estremità della sbarra agiscono forze di trazione rilevanti. Sia  $F_z = T$  la tensione longitudinale costante. Se la sbarra è fortemente compressa, e non tesa,  $T$  è negativa. Sviluppando il prodotto vettoriale  $[F \frac{dt}{dz}]$ , dobbiamo conservare solo i termini in cui appaia  $T$ , mentre, come si è fatto precedentemente, i termini in  $F_x$  e  $F_y$  possono essere omessi. Sostituendo al vettore  $\frac{dt}{dz}$  le sue componenti  $X'', Y'', 1$ , si hanno le equazioni di equilibrio nella forma

$$\begin{aligned} I_2 E X'' & - TX'' - K_x = 0, \\ I_1 E Y'' & - TY'' - K_y = 0. \end{aligned} \quad (20,14)$$

Si vengono ad aggiungere alle espressioni (20,5) dello sforzo di taglio i termini dati dalle proiezioni sugli assi  $x$  ed  $y$  della forza  $T$  collineare con  $t$ :

$$F_x = -EI_2 X'' + TX', \quad F_y = -EI_1 Y'' + TY'. \quad (20,15)$$

Queste formule possono essere dedotte direttamente dalla (19,3).

Una grande forza  $T$  può, in certi casi, essere generata dalla flessione stessa, anche in assenza di speciali forze di trazione applicate. Si consideri il caso di una sbarra con estremità incastrate o articolate, senza possibilità di spostamento longitudinale. Nella flessione la sbarra si allunga, quindi appare la forza  $T$ . Si valuta facilmente la freccia in corrispondenza alla quale detta forza acquista rilevanza. La lunghezza  $L + \Delta L$  della sbarra flessa è data dall'integrale

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2} dz$$

preso su una retta che congiunge i punti di appoggio. Se la flessione è debole, si può usare per l'integrando la formula di Taylor e si ottiene per l'allungamento  $\Delta L$ :

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz.$$

La forza di tensione che risulta da una trazione semplice è uguale al prodotto dell'allungamento relativo per il modulo di Young e per la sezione  $S$  della sbarra. Allora per  $T$  si ha

$$T = \frac{ES}{2L} \int_0^L (X'^2 + Y'^2) dz. \quad (20,16)$$

Se l'ordine di grandezza della freccia è  $\delta$ , le derivate  $X'$  e  $Y'$  sono dell'ordine di  $\frac{\delta}{L}$ , quindi l'ordine di grandezza dell'integrale nella (20,16) è  $\frac{\delta^2}{L^2} L = \frac{\delta^2}{L}$ , e  $T \sim ES \left(\frac{\delta}{L}\right)^2$ . I rispettivi ordini di grandezza dei primi e secondi termini nelle (20,14) sono  $IE \frac{\delta}{L^4}$  e  $T \frac{\delta}{L^2} \sim ES \frac{\delta^3}{L^4}$ . Il momento di inerzia  $I \sim h^4$  e  $S \sim h^2$ , dove  $h$  è lo spessore della sbarra. Sostituendo, si deduce che i primi e secondi termini nella (20,14) diventano confrontabili quando

$$\delta \sim h.$$

Quindi, quando una sbarra ad estremi fissi si flette, si possono usare le equazioni di equilibrio nella forma (20,4) solo se la freccia è piccola rispetto allo spessore della sbarra. Nel caso opposto (ma ovviamente sempre nelle condizioni  $\delta \ll L$ ), si dovrà far ricorso alle (20,14). La forza  $T$  in queste equazioni non è assegnata a priori; nel risolvere tali equazioni  $T$  è dapprima considerata quale un parametro. Ottenuta la soluzione, che dipende ovviamente da  $T$ , quest'ultima viene determinata tramite la (20,16), cioè resta così assegnata dalle forze di flessione applicate alla sbarra.

Si ha un altro caso limite allorché la resistenza della flessione è piccola rispetto alla resistenza alla trazione, e quindi nelle (20,14) possono trascurarsi i primi termini rispetto ai secondi. Questo caso si realizza fisicamente o con una tensione molto forte, o anche quando  $EI$  è molto piccolo, per esempio perché  $h$  è piccolo (le sbarre fortemente tese sono dette *corde*). In questo caso le equazioni di equilibrio diventano

$$TX'' + K_x = 0, \quad TY'' + K_y = 0. \quad (20,17)$$

Dire che le estremità della corda sono fisse significa dire che ne sono assegnate le coordinate

$$X = Y = 0. \quad (20,18)$$

Per quanto concerne la direzione delle estremità, questa non può essere assegnata arbitrariamente, ma è assegnata dalla soluzione delle equazioni.

Le espressioni delle equazioni di equilibrio di una sbarra debolmente flessa possono essere dedotte da un principio variazionale, utilizzando l'espressione (18,10) dell'energia elastica:

$$F_{sb} = \frac{E}{2} \int (I_1 Y''^2 + I_2 X''^2) dz.$$

All'equilibrio la somma di tale energia e dell'energia potenziale delle forze esterne  $K$  agenti sulla sbarra deve assumere un minimo,

cioè

$$\delta F_{sb} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y) dz = 0$$

(il secondo termine è il lavoro delle forze esterne in uno spostamento infinitesimo della linea della sbarra). Variando  $F_{sb}$ , si integra due volte per parti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int X''^2 dz &= \int X'' \delta X'' dz = X'' \delta X' | - \\ &- \int X''' \delta X' dz = X'' \delta X' | - X''' \delta X | + \int X''' \delta X dz \end{aligned}$$

e analogamente per l'integrale di  $Y''^2$ . Si ottiene così

$$\begin{aligned} \int [(EI_1 Y''' - K_y) \delta Y + (EI_2 X''' - K_x) \delta X] dz + \\ + EI_1 (Y'' \delta Y' - Y''' \delta Y) | + EI_2 (X'' \delta X' - X''' \delta X) | = 0. \end{aligned}$$

Le variazioni  $\delta X$ ,  $\delta Y$  sono arbitrarie, quindi dai termini integrandi discendono le equazioni di equilibrio (20,4), mentre i termini integrati danno le condizioni ai limiti; così, nel caso di estremità libere, le variazioni  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta X'$ ,  $\delta Y'$  sono arbitrarie e si ritrovano le condizioni (20,11). Nello stesso tempo, i coefficienti di  $\delta X$  e  $\delta Y$  in questi termini danno le espressioni (20,5) per le componenti dello sforzo di taglio ed i coefficienti di  $\delta X'$  e  $\delta Y'$  le espressioni (20,3) per le componenti del momento flettente.

Infine, si possono ottenere nello stesso modo le equazioni di equilibrio (20,14), in presenza di una forza di trazione  $T$ , aggiungendo all'espressione dell'energia variata la quantità

$$T \Delta L = \frac{T}{2} \int (X'^2 + Y'^2) dz$$

che rappresenta il lavoro compiuto da  $T$  in un allungamento  $\Delta L$  della sbarra.

### P R O B L E M I

1. Determinare la configurazione che una sbarra assume sotto l'azione del suo peso, in funzione delle diverse modalità con cui si esplicano i vincoli sulle sue estremità. La lunghezza della sbarra è  $l$ .

*Soluzione.* La configurazione ricercata è assegnata dalla soluzione dell'equazione

$$\xi'''' = -\frac{q}{EI}$$

( $q$  è il peso per unità di lunghezza della sbarra), con le condizioni ai limiti formulate nel testo. Secondo il modo in cui le estremità della sbarra sono vincolate, si ottengono le forme seguenti e relativi spostamenti massimi (frecce); l'origine è fissata in una delle estremità.

a) Due estremità incastrate:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z-l)^2, \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

b) Due estremità poggiate:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z (z^3 - 2lz^2 + l^3), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

c) Una estremità ( $z = l$ ) incastrata, l'altra ( $z = 0$ ) poggiate:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z (2z^3 - 3lz^2 + l^3), \quad \zeta (0,42l) = 0,0054 \frac{ql^4}{EI}.$$

d) Una estremità ( $z = 0$ ) incastrata, l'altra ( $z = l$ ) libera:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z^2 - 4lz + 6l^2), \quad \zeta (l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

2. Determinare la configurazione che una sbarra assume allorché è sottoposta all'azione di una forza concentrata  $f$ , applicata nel suo punto centrale.

*Soluzione.* Si ha ovunque, eccetto che nel punto  $z = l/2$ , l'equazione  $\zeta''' = 0$ . Le condizioni ai limiti ( $z = 0$  e  $z = l$ ) sono determinate dal modo in cui sono realizzati i vincoli; nel punto  $z = l/2$  le  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$  debbono essere continue e la differenza tra i valori dello sforzo di taglio  $F = -EI\zeta''$ , dall'una e dall'altra parte di questo punto, deve essere uguale alla forza  $f$ .

La forma della sbarra (nel tratto  $0 \leq z \leq l/2$ ) e la freccia sono date dalle formule seguenti.

a) Estremità incastrate:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z^2 (3l - 4z), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

b) Estremità poggiate:

$$\zeta = \frac{f}{48EI} z (3l^2 - 4z^2), \quad \zeta \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

La forma della sbarra è simmetrica rispetto al centro, pertanto la funzione  $\zeta(z)$  nel tratto  $l/2 \leq z \leq l$  si deduce dalle precedenti con la sostituzione  $z \rightarrow l - z$ .

3. Stesso problema per una sbarra in cui una estremità ( $z = 0$ ) è incastrata e l'altra ( $z = l$ ) è libera e sottoposta ad una forza concentrata  $f$ .

*Soluzione.* Lungo la sbarra si ha  $F = \text{cost} = f$ , talché  $\zeta''' = -f/EI$ . Con le condizioni  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  per  $z = 0$  e  $\zeta'' = 0$  per  $z = l$ , si ha

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \quad \zeta(l) = \frac{fl^3}{2EI}.$$

4. Determinare la forma assunta da una sbarra con estremità incastrate, sapendo che è sottoposta nel centro all'azione di una coppia concentrata.

*Soluzione.* Lungo tutta la sbarra si ha  $\zeta'''' = 0$  e nel punto  $z = l/2$  il momento  $M = EI\zeta''$  subisce una discontinuità pari al valore  $m$  della coppia concentrata applicata. Si ha:

a) estremità incastrate:

$$\zeta = \frac{m}{8EI} z^2 (l - 2z) \quad \text{per } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{8EI} (l - z)^2 [l - 2(l - z)] \quad \text{per } l/2 \leq z \leq l;$$

b) estremità articolate:

$$\zeta = \frac{m}{24EIl} z(l^2 - 4z^2) \quad \text{per } 0 \leq z \leq l/2,$$

$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l-z)[l^2 - 4(l-z)^2] \quad \text{per } l/2 \leq z \leq l.$$

La sbarra si incurva in senso opposto da una parte e dall'altra del punto  $z = l/2$ .

5. Stesso problema sapendo che la coppia concentrata è applicata all'estremità libera della sbarra, mentre l'altra estremità è incastrata.

*Soluzione.* Lungo tutta la sbarra  $M = EI\zeta'' = m$  e nel punto  $z = 0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$ . La forma è definita da

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$

6. Trovare che forma assume una sbarra di sezione circolare, con estremità articolate, quando è sottoposta ad una forza di trazione  $T$  e ad una forza di flessione  $f$ , applicata nel centro.

*Soluzione.* Lungo il tronco  $0 \leq z \leq l/2$  lo sforzo di taglio è uguale a  $f/2$ , talché dalla (20,15) segue

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Le condizioni ai limiti:  $\zeta = 0$ ,  $\zeta' = 0$  per  $z = 0$ ,  $l$ ;  $\zeta' = 0$  per  $z = l/2$  (in virtù della continuità di  $\zeta'$ ). Si ottiene l'equazione che determina la forma della sbarra (sul segmento  $0 \leq z \leq l/2$ )

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left( z - \frac{\operatorname{sh} kz}{k \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right), \quad k = \sqrt{\frac{T}{EI}}.$$

Per piccoli valori di  $k$ , questa espressione si riduce a quella dedotta nel problema 2, b). Per grandi valori di  $k$  diviene

$$\zeta = \frac{f}{2T} \frac{z}{T},$$

cioè, in vista delle (20,17), un filo elastico sottoposto alla forza  $f$  assume la forma di una spezzata con massimo in  $z = l/2$ .

Se la forza  $T$  proviene dalla trazione della sbarra che risulta dall'applicazione della forza trasversale, bisogna ricorrere alla (20,16) per determinarla. Sostituendo in questa l'espressione ottenuta, si ha

$$\frac{1}{k^6} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 \frac{kl}{2} - \frac{3}{kl} \operatorname{th} \frac{kl}{2} \right] = \frac{8E^2 I^3}{f^2 S}$$

che assegna  $T$  in funzione di  $f$ .

7. Una sbarra indefinita, di sezione circolare, è sostenuta da una base elastica, cioè a dire che a seguito di una deformazione essa subisce una forza  $K = -\alpha\zeta$ , proporzionale alla deformazione stessa. Si determini la forma che la sbarra assume a seguito dell'applicazione di una forza concentrata  $f$ .

*Soluzione.* Assumeremo come origine delle coordinate il punto di applicazione di  $f$ . Si ha allora ovunque, salvo che in  $z = 0$ ,

$$EI\zeta'''' = -\alpha\zeta.$$

La soluzione deve soddisfare alle condizioni ai limiti  $\zeta(\pm\infty) \neq 0$  ed inoltre  $\zeta'$  e  $\zeta''$  debbono essere continue in  $z=0$ ; per quanto riguarda la discontinuità dello sforzo di taglio  $F = -EI\zeta'$  in  $z=0$  essa deve essere uguale ad  $f$ . Una soluzione così determinata è data da

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI} e^{-\beta|z|} [\cos \beta|z| + \sin \beta|z|], \quad \beta = \left( \frac{\alpha}{4EI} \right)^{1/4}.$$

8. Dedurre l'equazione dell'equilibrio di una sbarra sottile (di sezione circolare) debolmente flessa, sapendo che la sua forma naturale è un arco di cerchio e che la flessione si effettua nel piano della sbarra, sotto l'azione di forze radiali.

*Soluzione.* Scegliendo l'origine delle coordinate polari  $r, \varphi$  nel centro del cerchio, scriviamo l'equazione della sbarra deformata nella forma  $r = a + \zeta(\varphi)$ , ove  $a$  è il raggio del cerchio e  $\zeta$  lo spostamento radiale dovuto alla flessione. Esprimendo il raggio di curvatura in coordinate polari, arrestandoci ai termini del primo ordine in  $\zeta$ , troviamo

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2}$$

(l'operazione di derivazione è relativa a  $\varphi$ ). Dalle (18,11) si ha per l'energia elastica di flessione

$$F_{sb} = \frac{EI}{2} \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a d\varphi = \frac{EI}{2a^3} \int_0^{\varphi_0} (\zeta + \zeta'')^2 d\varphi,$$

ove  $\varphi_0$  è l'angolo al centro. L'equazione di equilibrio segue dal principio variazionale:

$$\delta F_{sb} - \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta K_r a d\varphi = 0$$

( $K_r$  è la forza radiale esterna per unità di lunghezza), con la condizione supplementare

$$\int_0^{\varphi_0} \zeta d\varphi = 0$$

che, nella presente approssimazione, esprime la condizione di invarianza del perimetro della sbarra, cioè l'assenza di variazione della lunghezza totale. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ha

$$\delta F_{sb} - \int_0^{\varphi_0} a K_r \delta \zeta d\varphi + \alpha \int_0^{\varphi_0} \delta \zeta d\varphi = 0,$$

ove  $\alpha$  è una costante. Effettuando la variazione ed integrando quindi ripetutamente per parti il termine in  $\delta \zeta''$ , otteniamo

$$\begin{aligned} & \int \left[ \frac{EI}{a^3} (\zeta + 2\zeta'' + \zeta''') - a K_r + \alpha a \right] \delta \zeta d\varphi + \\ & + \frac{EI}{a^3} (\zeta + \zeta'') \delta \zeta' - \frac{EI}{a^3} (\zeta' + \zeta''') \delta \zeta = 0. \end{aligned}$$

L'equazione di equilibrio è dunque<sup>1)</sup>

$$\frac{EI}{a^4} (\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0, \quad (1)$$

l'espressione dello sforzo di taglio

$$F = -\frac{EI}{a^3} (\zeta' + \zeta''),$$

l'espressione del momento flettente

$$M = \frac{EI}{a^2} (\zeta + \zeta'')$$

(cfr. fine del § 20). La costante  $\alpha$  si determina a partire dalla richiesta di invarianza della lunghezza totale della sbarra.

9. Trovare la deformazione di un anello circolare sottoposto all'azione di due forze concentrate diametralmente opposte (fig. 18).

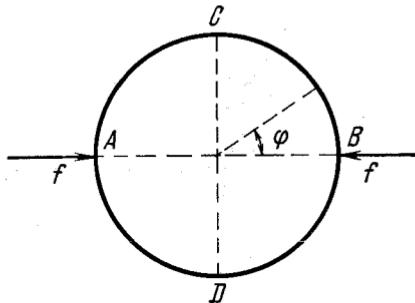


Fig. 18

*Soluzione.* Integrando l'equazione (1) lungo la circonferenza dell'anello, si ha

$$2\pi\alpha a = \int K_r a \, d\varphi = 2f.$$

Ovunque, eccetto che per  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$ , si ha l'equazione (1) con  $K_r = 0$ :

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

La deformazione cercata è simmetrica rispetto ai diametri  $AB$  e  $CD$ , quindi deve aversi  $\zeta' = 0$  in  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . La differenza dei valori dello sforzo di taglio per  $\varphi \rightarrow \pm 0$  deve essere uguale ad  $f$ . La soluzione dell'equazione di equilibrio che soddisfa queste condizioni è

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\pi}{8} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

<sup>1)</sup> In assenza di forze esterne  $K_r = 0$  e  $\alpha = 0$ ; le soluzioni non nulle dell'equazione omogenea dedotta corrispondono ad una rotazione o ad una traslazione della sbarra.

Allora i punti *A* e *B* si avvicinano l'uno all'altro di

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

### § 21. Stabilità dei sistemi elastici

Il comportamento di una sbarra sottoposta all'azione di forze di compressione longitudinali è un esempio semplice dell'importante fenomeno dell'*instabilità elastica*, scoperto da *Euler*.

In assenza di forze trasversali esterne di flessione  $K_x$  e  $K_y$ , le equazioni di equilibrio della sbarra compressa (20,14) hanno la soluzione  $X = Y = 0$ , corrispondente alla forma rettilinea della sbarra, sottoposta ad una forza longitudinale  $|T|$ . Ma questa soluzione di equilibrio è stabile solo se la forza di compressione  $|T|$  si mantiene al di sotto di un certo valore critico  $T_{crit}$ . Finché  $|T| < T_{crit}$ , la forma rettilinea della sbarra è stabile rispetto a piccole perturbazioni arbitrarie. Detto altrimenti, se la sbarra si incurva un poco sotto l'effetto di un'azione debole, di natura qualsiasi, essa tende a ritornare nello stato iniziale quando questa forza cessa.

Al contrario, se  $|T| > T_{crit}$ , la forma rettilinea è una posizione di equilibrio instabile. Se un'azione (una flessione) arbitrariamente piccola perturba l'equilibrio, la sbarra si piega fortemente. È allora evidente che la sbarra compressa non può che restare incurvata. Dopo che la sbarra è divenuta instabile, il suo comportamento deve essere descritto dalle equazioni della flessione forte. Tuttavia, il valore del carico critico  $T_{crit}$  può essere dedotto dalle equazioni della flessione debole. Per  $|T| = T_{crit}$  la configurazione rettilinea corrisponde ad un equilibrio indifferente, cioè a dire, oltre ad  $X = Y = 0$  debbono esistere altri stati di flessione debole che siano stati di equilibrio. Allora si può definire il valore di  $T_{crit}$  come quel valore di  $|T|$  per cui le equazioni

$$EI_2 X''' + |T| X'' = 0, \quad EI_1 Y''' + |T| Y'' = 0 \quad (21,1)$$

ammettono una soluzione non nulla. Questa soluzione non nulla definisce il carattere della deformazione cui la sbarra viene sottoposta, subito dopo la perdita di equilibrio.

Qui di seguito trattiamo diversi casi tipici di perdita dell'equilibrio dei sistemi elastici.

### P R O B L E M I

- Determinare la forza di compressione critica per una sbarra articolata ai suoi estremi.

*Soluzione.* Poiché ci interessa il valore minimo di  $|T|$  per cui le equazioni (21,1) ammettono una soluzione non nulla, basta considerare tra le due equazio-

ni quella che corrisponde al minimo tra  $I_1$  e  $I_2$ ; supponiamo  $I_2 < I_1$ . Cerchiamo la soluzione dell'equazione  $EI_2 X''' + |T| X'' = 0$  nella forma

$$X = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz,$$

con  $k = \sqrt{|T|/EI_2}$ . La soluzione non nulla, soddisfacente le condizioni ai limiti  $X = 0$ ,  $X'' = 0$  per  $z = 0$ ,  $l$ , è

$$X = C \sin kz$$

e si deve avere  $kl = 0$ . Se ne deduce che la forza critica è

$$T_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

Allontanatasi dall'equilibrio, la sbarra assume la configurazione raffigurata nella fig. 19, a.

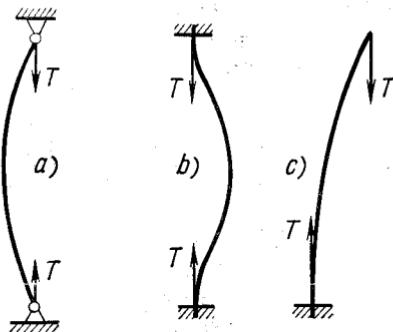


Fig. 19

2. Eguale problema per una sbarra con estremità incastrate (fig. 19, b).

$$\text{Soluzione. } T_{\text{crit}} = \frac{4\pi^2 EI_2}{l^2}.$$

3. Stesso problema per una sbarra con una estremità incastrata e l'altra libera (fig. 19, c).

$$\text{Soluzione. } T_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI_2}{4l^2}.$$

4. Trovare la compressione critica per una sbarra di sezione circolare, con estremi articolati e con base elastica (cfr. il problema 7 del § 20).

*Soluzione.* Al posto delle (21,1) si ha l'equazione

$$EIX''' + |T| X'' + \alpha X = 0.$$

Uno studio analogo conduce alla soluzione

$$X = A \sin \frac{n\pi}{l} z, \quad T_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left( n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right).$$

Deve essere considerata solo quella che corrisponde ai valori interi di  $n$  per cui  $T_{\text{crit}}$  è minimo. Per  $\alpha$  sufficientemente grandi si ha  $n > 1$ , cioè dopo la perdita di equilibrio la configurazione della sbarra ha diversi «ventri».

5. Una sbarra di sezione circolare è sottoposta a torsione; le sue estremità sono incastrate. Determinare il valore critico della torsione oltre il quale la disposizione rettilinea diventa instabile.

*Soluzione.* Il valore critico dell'angolo di torsione è determinato dall'insorgere di soluzioni non nulle delle equazioni di flessione debole della sbarra torta. Per stabilire queste equazioni, sostituiamo l'espressione (19,7)

$$M = EI \left[ t \frac{dt}{dl} \right] + C\tau t$$

( $\tau$  è l'angolo di torsione costante) nella (19,3); si ha

$$EI \left[ t \frac{d^2t}{dl^2} \right] + C\tau \frac{dt}{dl} - [Ft] = 0.$$

Deriviamo questa equazione: la flessione è debole, quindi nel derivare il primo e il terzo termine si può supporre  $t$  costante, uguale al vettore  $t_0$  diretto lungo l'asse della sbarra (asse  $z$ ). Ricordando che si è in assenza di forze esterne longitudinali e quindi  $\frac{dF}{dl} = 0$ , si ottiene

$$EI \left[ t_0 \frac{d^3t}{dl^3} \right] + C\tau \frac{d^2t}{dl^2} = 0$$

ovvero

$$Y''' - \kappa X''' = 0,$$

$$X'''' + \kappa Y''' = 0,$$

con  $\kappa = \frac{C\tau}{EI}$ . Introducendo la funzione complessa  $\xi = X + iY$  si ha l'equazione  $\xi'''' - i\kappa \xi''' = 0$ . Cerchiamone la soluzione che soddisfi alle condizioni  $\xi = 0$ ,  $\xi' = 0$  per  $z = 0$ ,  $l$  nella forma  $\xi = a(1 + ixz - e^{ixz}) + bz^2$ . Si ottiene come condizione di compatibilità delle equazioni rispetto ad  $a$  e  $b$   $e^{inx} = \frac{2 + ixl}{2 - ixl}$ , quindi  $\frac{xl}{2} = \operatorname{tg} \frac{xl}{2}$ . La più piccola radice di questa equazione è  $\frac{xl}{2} = 4,49$ , talché

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{3,98EI}{Cl}.$$

6. Stesso problema per una sbarra con estremità articolate.

*Soluzione.* Si ottiene qui  $\xi = a \left( 1 - e^{inx} - \frac{\kappa^2}{2} z^2 \right) + bz$ , dove  $\kappa$  è definito da  $e^{inx} = 1$ , cioè  $xl = 2\pi$ . Di conseguenza, l'angolo di torsione critico è

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{2\pi EI}{Cl}.$$

7. Determinare il limite di stabilità di una sbarra verticale sottoposta all'azione del proprio peso; la sbarra è incastrata in basso.

*Soluzione.* Se la tensione longitudinale  $F_z \equiv T$  varia lungo la sbarra, nel primo membro della (20,1)  $\frac{dF_z}{dl} \neq 0$  e invece della (20,14) si hanno

$$I_2 EX''' - (TX)' - K_x = 0,$$

$$I_1 EY''' - (TY)' - K_y = 0.$$

Nel presente caso le forze trasversali di flessione sono assenti in tutta la lunghezza della sbarra e  $T = -q(l-z)$ , dove  $q$  è il peso specifico della sbarra e  $z$  è contata a partire dall'estremità inferiore. Supponendo  $I_2 < I_1$  consideriamo l'equazione

$$I_2 E X''' = T X' = -q(l-z) X'$$

(per  $z=l$  si ha automaticamente  $X'''=0$ ). L'integrale generale di questa equazione per la funzione  $u=X'$  è

$$u = \eta^{1/3} [a J_{-1/3}(\eta) + b J_{1/3}(\eta)],$$

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI_2} (l-z)^3}.$$

Le condizioni ai limiti  $X'=0$  per  $z=0$  e  $X''=0$  per  $z=l$  danno per la  $u(\eta)$  le condizioni

$$u=0 \text{ per } \eta=\eta_0 \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q l^3}{EI_2}}, \quad u' \eta^{1/3}=0 \text{ per } \eta=0.$$

Per soddisfare queste condizioni occorre porre  $b=0$ ,  $J_{-1/3}(\eta_0)=0$ . La radice più piccola di questa equazione è  $\eta_0=1,87$ , da cui si ricava la lunghezza critica della sbarra

$$l_{\text{crit}} = 1,98 \left( \frac{EI_2}{q} \right)^{1/3}.$$

8. Una sbarra ha una sezione trasversale schiacciata, cosicché  $I_2 \gg I_1$ . Delle due estremità, l'una è incastrata, l'altra è soggetta ad una forza  $f$  che incurva la sbarra nel piano principale  $x, z$  (in questo piano il valore della rigidità di flessione è  $EI_2$ ). Determinare il valore critico della forza  $f_{\text{crit}}$ , oltre il quale la flessione nel piano  $x, z$  diviene instabile, talché la sbarra, torcendosi, si incurva nel piano  $y, z$ .

*Soluzione.* La rigidità  $EI_2$  è grande rispetto ad  $EI_1$  (e rispetto alla rigidità di torsione  $C^1$ ), quindi l'instabilità rispetto all'incurvamento laterale forte sopravviene quando la flessione nel piano  $x, z$  è ancora debole. Per determinare l'istante in cui si realizza l'instabilità, bisogna scrivere le equazioni dell'incurvamento laterale debole, conservando i termini proporzionali al prodotto della forza  $f$ , agente nel piano  $x, z$  e degli spostamenti piccoli. Poiché la forza concentrata agisce solo sull'estremità libera, lungo tutta la sbarra  $F=f$  e nella estremità libera ( $z=l$ ) il momento  $M=0$ ; partendo dalla (19,6) si hanno le seguenti espressioni per le componenti del momento nel riferimento fisso  $x, y, z$ :

$$M_x = 0, \quad M_y = (l-z)f, \quad M_z = (Y - Y_0)f,$$

dove  $Y_0 = Y(l)$ . Proiettiamo questi momenti sugli assi  $\xi, \eta, \zeta$  del riferimento solidale in ogni punto alla sbarra; conservando solo i termini lineari negli spostamenti, si ha

$$M_\xi = \varphi(l-z)f, \quad M_\eta = (l-z)f,$$

$$M_\zeta = (l-z)f \frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0),$$

dove  $\varphi$  è l'angolo di rotazione totale della sezione della sbarra torta (l'angolo di torsione  $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$  non è costante lungo la sbarra). D'altra parte, per le (18,6)

<sup>1)</sup> Così, per una sezione di spessore  $h$  ed altezza  $b \gg h$  si ha

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12} E, \quad EI_2 = \frac{b^3 h}{12} E, \quad C = \frac{bh^3}{3} \mu.$$

che è l'equazione delle vibrazioni longitudinali in una sbarra. Vediamo che si tratta dell'equazione usuale delle onde, con velocità di propagazione

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (25,2)$$

Confrontandola con l'espressione (22,4) di  $c_l$  constatiamo che tale velocità risulta inferiore a quella delle onde longitudinali in un mezzo illimitato.

Passiamo ora all'esame delle onde longitudinali nelle lame sottili. L'equazione del moto di tali vibrazioni si scrive subito sostituendo nelle equazioni di equilibrio (13,4) —  $\rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$  e  $-\rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$  al posto di  $P_x$  e  $P_y$

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (25,3)$$

Riferiamoci ad un'onda « piana » propagantesi lungo l'asse  $x$ , cioè ad un'onda in cui la deformazione è funzione della sola  $x$ . Le equazioni si semplificano considerevolmente e diventano

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (25,4)$$

Si hanno le usuali equazioni delle onde. I coefficienti che vi appaiono differiscono per  $u_x$  e  $u_y$ . La velocità di propagazione dell'onda con vibrazioni parallele alla direzione di propagazione ( $u_x$ ) è

$$\sqrt{\frac{E}{[\rho(1-\sigma^2)]}}. \quad (25,5)$$

Per quanto concerne la velocità di propagazione ( $u_y$ ), le cui vibrazioni sono perpendicolari alla direzione della propagazione (ma, come sopra, situate nel piano della lamina), essa è uguale a quella  $c_t$  delle onde trasversali in un mezzo illimitato.

Vediamo dunque che le onde « longitudinali » nelle sbarre e nelle lame hanno le stesse caratteristiche delle onde in un mezzo illimitato; si distinguono da queste ultime solo per la grandezza della velocità che, come in precedenza, non dipende dalla frequenza. Tutt'altra è la situazione per le onde di flessione nelle sbarre e nelle lame, quando le vibrazioni avvengono normalmente all'asse della sbarra o al piano della lamina, cioè a dire, onde che trasportano la flessione.

# Capitolo III

## ONDE ELASTICHE

### § 22. Onde elastiche in un mezzo isotropo

Se nel corpo che si deforma vi è movimento, la temperatura in generale non è costante ma varia tanto rispetto al tempo quanto localmente. Questo evento interviene a complicare notevolmente le equazioni esatte del moto, nel caso di movimenti arbitrari.

Ma il fatto che la trasmissione del calore da una regione del corpo all'altra (per pura termoconduzione) avvenga molto lentamente, permette di semplificare il problema. Infatti, se non si ha praticamente scambio di calore sulla scala dei tempi dell'ordine del periodo di oscillazione nel corpo, si può considerare ciascuna regione del corpo isolata termicamente, talché il movimento è adiabatico. Ora, nel caso di deformazioni adiabatiche,  $\sigma_{ik}$  è espresso in funzione degli  $u_{ik}$  tramite le formule usuali, con la sola differenza che al posto dei valori ordinari (« isotermi ») di  $E$  e  $\sigma$  occorrerà considerare i loro valori adiabatici (si confronti il § 6). Supporremo tale circostanza verificata in tutto il resto del capitolo, talché per  $E$  e  $\sigma$  si debbono intendere i corrispettivi valori adiabatici.

Per dedurre le equazioni del movimento del mezzo elastico, bisogna uguagliare le componenti della forza degli sforzi interni  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  alle corrispondenti componenti dell'accelerazione  $\ddot{u}_i$ , moltiplicate per la densità di massa  $\rho$ :

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (22,1)$$

È questa la forma generale delle equazioni del moto.

In particolare, le equazioni del moto in un mezzo elastico isotropo possono scriversi direttamente, in analogia con l'equazione di equilibrio (7,2), e precisamente si ha

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (22,2)$$

Poiché tutte le deformazioni sono supposte piccole, corrispondentemente i movimenti considerati nella teoria dell'elasticità sono oscillazioni piccole, dette *oscillazioni elastiche* o *onde*. Cominceremo

e (18,9), valide nel caso di flessione debole, si ha

$$M_{\xi} = -EI_1 Y'', \quad M_{\eta} = EI_2 X'', \quad M_{\zeta} = C\varphi'.$$

Dal confronto di queste espressioni segue:

$$EI_2 X'' = (l - z) f,$$

$$EI_1 Y'' = -\varphi (l - z) f, \quad C\varphi' = (l - z) fY' + (Y - Y_0) f.$$

La prima equazione determina la flessione principale della sbarra nel piano  $x, z$ ; il problema è di determinare quel valore di  $f$  in corrispondenza del quale la seconda equazione e la terza ammettono una soluzione non nulla. Eliminando tra queste due la  $Y$  si ottiene

$$\varphi'' + k^2 (l - z)^2 \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{f^2}{EI_1 C}.$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$\varphi = a \sqrt{l-z} J_{1/4} \left( \frac{k}{2} (l-z)^2 \right) + b \sqrt{l-z} J_{-1/4} \left( \frac{k}{2} (l-z)^2 \right).$$

Nell'estremità incastrata ( $z = 0$ ) si deve avere  $\varphi = 0$ , e nell'estremità libera il momento torcente  $C\varphi' = 0$ . La seconda condizione fornisce  $a = 0$ , dalla prima segue  $J_{-1/4} \left( \frac{kl^2}{2} \right) = 0$ . La più piccola radice di questa equazione è  $\frac{kl^2}{2} = 2,006$ , quindi

$$f_{\text{crit}} = \frac{4,01 \sqrt{EI_1 C}}{l^2}.$$

parti del corpo. Al contrario, per le onde longitudinali si ha  $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ ; queste onde sono accompagnate da fenomeni di compressione e dilatazione.

La scomposizione di un'onda in due componenti che si propagano indipendentemente può effettuarsi anche nel caso più generale di un'onda elastica qualunque (non piana) in un mezzo illimitato.

Riscriviamo la (22,2) introducendo le velocità  $c_l$  e  $c_t$ :

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (22,6)$$

Scriviamo il vettore  $\mathbf{u}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (22,7)$$

dove  $\mathbf{u}_t$  soddisfa la condizione

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \quad (22,8)$$

e per  $\mathbf{u}_l$  si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0. \quad (22,9)$$

È noto dall'analisi vettoriale che una tale decomposizione è sempre possibile (si tratta della decomposizione di un vettore nella somma di un vettore rotazionale e in un vettore gradiente).

Sostituendo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  nella (22,6), segue:

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (22,10)$$

Si applichi ora l'operatore  $\operatorname{div}$  ai due membri dell'equazione. Si ha, tenuto conto che  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ ,

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_t^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l$$

e quindi

$$\operatorname{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0.$$

D'altra parte, anche il  $\operatorname{rot}$  dell'espressione entro parentesi è nullo in virtù della (22,9); ma se  $\operatorname{rot}$  e  $\operatorname{div}$  di un vettore scompaiono in tutto lo spazio allora questo vettore è identicamente nullo e quindi,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (22,11)$$

Applichiamo ora l'operatore  $\operatorname{rot}$  alla (22,10). Ricordando che  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$  e che  $\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$ , qualunque sia  $\varphi$ , si ha

$$\operatorname{rot} (\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0.$$

Peraltro, anche la divergenza della quantità entro parentesi è nulla e perciò

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (22,12)$$

Le equazioni (22,11) e (22,12) sono le usuali equazioni delle onde (tridimensionali). A ciascuna di queste equazioni corrisponde la propagazione di un'onda elastica, rispettivamente con velocità

col considerare un'onda elastica piana in un mezzo isotropo illimitato, cioè un'onda per cui la deformazione  $\mathbf{u}$  dipende da una sola coordinata  $x$  e dal tempo. Allora nella (22,2) sono nulle tutte le derivate rispetto a  $y$  e  $z$  e si ha

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (22,3)$$

(per  $u_z$  si ha la stessa equazione che per  $u_y$ ), dove si è posto <sup>1)</sup>

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (22,4)$$

Le equazioni (22,3) sono ordinarie equazioni delle onde unidimensionali;  $c_l$  e  $c_t$  sono le velocità di propagazione dell'onda. Si vede che la velocità di propagazione dell'onda è differente secondo che si tratti delle componenti  $u_x$  o  $u_y$  e  $u_z$ .

In tal modo un'onda elastica risulta composta di due onde che si propagano indipendentemente. In una ( $u_x$ ), lo spostamento è diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda stessa; diremo tale onda longitudinale, la sua velocità di propagazione è  $c_l$ . Nell'altra ( $u_y$ ,  $u_z$ ) lo spostamento giace in un piano normale alla direzione di propagazione e la velocità della stessa è  $c_t$ . Osserviamo che in base alle (22,4) la velocità di propagazione delle onde longitudinali è sempre maggiore di quella delle onde trasversali. Infatti si ha sempre <sup>2)</sup>

$$c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}. \quad (22,5)$$

$c_l$  e  $c_t$  sono dette rispettivamente *velocità longitudinale e trasversale del suono*.

Si ricorda che la variazione del volume durante una deformazione è data dalla somma dei termini diagonali del tensore di deformazione, cioè  $u_{ii} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$ . Nell'onda trasversale figurano solo le componenti  $u_y$ ,  $u_z$  e poiché queste non dipendono né da  $y$  né da  $z$ , per una tale onda si ha  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ; si deduce che le onde trasversali non sono in relazione con la variazione di volume nelle diverse

<sup>1)</sup> Diamo anche le espressioni di  $c_l$  e  $c_t$  in funzione dei moduli di compressione e di scorrimento e dei coefficienti di Lamé

$$c_l = \sqrt{\frac{3K+4\mu}{3\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

<sup>2)</sup> Poiché  $\sigma$  varia in realtà solo tra 0 e  $1/2$  (cfr. nota, pag. 24), si ha sempre la diseguaglianza più forte

$$c_l > c_t \sqrt{2}.$$

Per la parte trasversale dell'onda rifratta  $c' = c_{t2}$  e se l'onda incidente è trasversale, si ha

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

Nello stesso modo, per l'onda rifratta longitudinale

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{l1}}{c_{l2}}.$$

### PROBLEMI

1. Determinare il fattore di riflessione per un'onda longitudinale monocromatica con angolo di incidenza arbitrario su un corpo posto nel vuoto<sup>1)</sup>.

*Soluzione.* Poiché l'angolo di incidenza è arbitrario, emergeranno a seguito della riflessione sia onde longitudinali che trasversali. In base a considerazioni

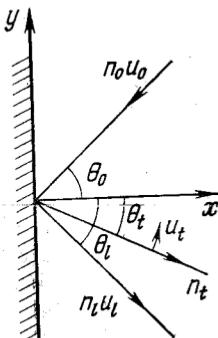


Fig. 20

di simmetria, è evidente a priori che il vettore spostamento nell'onda riflessa trasversale è tutto contenuto nel piano di incidenza (fig. 20;  $n_0$ ,  $n_l$ ,  $n_t$  sono rispettivamente i versori delle direzioni dell'onda incidente, dell'onda riflessa longitudinale e di quella riflessa trasversale,  $u_0$ ,  $u_l$ ,  $u_t$  i corrispondenti vettori spostamento). Lo spostamento totale nel corpo è uguale alla somma (per brevità si è omesso il fattore comune  $e^{-i\omega t}$ )

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + A_l \mathbf{n}_l e^{i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} + A_t [\mathbf{a} \mathbf{n}_t] e^{i \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

( $\mathbf{a}$  è il vettore normale al piano di incidenza). I valori assoluti dei vettori d'onda sono  $k_0 = k_l = \frac{\omega}{c_l}$ ,  $k_t = \frac{\omega}{c'_t}$  e gli angoli di incidenza  $\theta_0$ , di riflessione  $\theta_l$  e  $\theta_t$ ,

<sup>1)</sup> Per il caso più generale della riflessione di onde sonore da parte della superficie di separazione tra un solido e un liquido, inizialmente propagantisi in uno dei due mezzi, si consulti: L. M. Brekhovskikh, Onde nei mezzi stratificati, Ed. Accademia delle Scienze dell'URSS, 1957, § 4.

$c_l$  e  $c_{t1}$ . L'onda  $(\mathbf{u}_t)$  non è accompagnata da variazioni di volume, mentre con l'onda  $(\mathbf{u}_l)$  si hanno dilatazioni e compressioni.

In un'onda elastica monocromatica il vettore d'onda si scrive

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}, \quad (22,13)$$

dove  $\mathbf{u}_0$  è funzione delle coordinate. Per  $\mathbf{u}_0$  si ha

$$c_l^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_l^2 - c_{t1}^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0. \quad (22,14)$$

che discende dalla (22,6) quando per  $\mathbf{u}$  si adotti la (22,13). Le onde  $(\mathbf{u}_l)$  e  $(\mathbf{u}_t)$  soddisfano rispettivamente le

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_t + k_{t1}^2 \mathbf{u}_t = 0, \quad (22,15)$$

dove  $k_l = \frac{\omega}{c_l}$  e  $k_{t1} = \frac{\omega}{c_{t1}}$  sono rispettivamente i vettori d'onda, longitudinale e trasversale.

Consideriamo infine i fenomeni di riflessione e rifrazione di un'onda elastica piana monocromatica sulla superficie di separazione di due mezzi elastici diversi. Si noti che il tipo d'onda può, in generale, variare a seguito della riflessione o rifrazione. Un'onda incidente che sia puramente longitudinale o trasversale emerge come onda mista, cioè contenente sia componenti longitudinale che trasversale. Il tipo d'onda non varia (per ragioni di simmetria) se l'incidenza è normale e se nel caso di incidenza arbitraria si ha un'onda trasversale con vibrazioni parallele al piano di separazione.

Le relazioni che determinano le direzioni delle onde riflesse o rifratte possono dedursi direttamente dalla richiesta della costanza della frequenza e della componente del vettore d'onda nel piano tangente alla superficie di separazione<sup>1)</sup>. Se  $\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli di incidenza e di riflessione (o di rifrazione),  $c$ ,  $c'$  le velocità delle due onde in oggetto, allora

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'}. \quad (22,16)$$

Supponiamo per esempio che l'onda incidente sia trasversale. Allora  $c = c_{t1}$  è la velocità delle onde trasversali nel primo mezzo. Poiché si ha  $c' = c_{t1}$  per l'onda trasversale riflessa, dalla (22,16) segue:

$$\theta = \theta',$$

cioè l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali. Ma se l'onda riflessa è longitudinale, allora  $c' = c_{l1}$ , e

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}.$$

<sup>1)</sup> Cfr. VI, § 65. Tutte le considerazioni ivi riportate si applicano integralmente qui.

Introduciamo il « potenziale » di spostamento  $\varphi$  tramite  $u_r = u = \partial\varphi/\partial r$ . L'equazione del moto si riduce all'equazione d'onda  $c_l^2 \Delta\varphi = \ddot{\varphi}$ ; per le vibrazioni periodiche nel tempo ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) segue:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) = -k^2\varphi, \quad k = \frac{\omega}{c_l}. \quad (1)$$

La soluzione che si mantiene finita in tutta la palla, origine inclusa,

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r}$$

(si è omesso il fattore temporale). Gli sforzi radiali sono

$$\sigma_{rr} = \rho \{(c_l^2 - 2c_t^2) u_{rr} + 2c_t^2 u_{rr}\} = \rho \{(c_l^2 - 2c_t^2) \Delta\varphi + 2c_t^2 \ddot{\varphi}\}$$

o, per la (1),

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{rr} = -\omega^2\varphi - 4c_t^2 \frac{1}{r} \varphi'. \quad (2)$$

Dalla condizione ai limiti  $\sigma_{rr}(R) = 0$ , segue:

$$\frac{\operatorname{tg} kr}{kr} = \frac{1}{1 - (kR c_l / 2c_t)^2}. \quad (3)$$

che con le sue radici determina le autofrequenze  $\omega = c_l k$ .

4. Determinare le frequenze delle vibrazioni radiali di una cavità sferica in un mezzo elastico illimitato, con  $c_l \gg c_t$  (*M. A. Issakovič*, 1949).

**Soluzione.** In un mezzo illimitato le vibrazioni radiali di una cavità avvengono con irraggiamento d'onde sonore longitudinali, quindi con conseguente perdita d'energia e smorzamento delle vibrazioni. Per  $c_l \gg c_t$  (cioè  $K \gg \mu$ ) questo irraggiamento è debole e si può dire che si hanno autofrequenze con un piccolo termine di smorzamento.

Cerchiamo la soluzione della (1) nella forma di un'onda sferica divergente:

$$\varphi = A \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c_l}.$$

Dalla (2) si deduce, in virtù della condizione al limite  $\sigma_{rr}(R) = 0$ ,

$$\left( kR \frac{c_l}{c_t} \right)^2 = 4(1 - ikR).$$

Allora, per  $c_l \gg c_t$ , si ha

$$\omega = \frac{2c_t}{R} \left( 1 - i \frac{c_t}{c_l} \right).$$

La parte reale di  $\omega$  fornisce l'autofrequenza delle vibrazioni, la parte immaginaria il fattore di smorzamento. In un mezzo incompressibile ( $c_l \rightarrow \infty$ ) non esiste smorzamento: questo risulta essere un effetto specifico della resistenza del mezzo allo scorrimento ( $\mu \neq 0$ ). Osserviamo che in questo caso  $kR = 2c_t/c_l \ll 1$ , cioè la lunghezza d'onda corrispondente a queste vibrazioni è grande rispetto ad  $R$  (è interessante confrontare questo caso con le vibrazioni di una sfera elastica, per le quali, per  $c_l \gg c_t$ , la prima autofrequenza è definita, in virtù della (3), dalla relazione  $kR = \pi$ ).

sono legati dalle  $\theta_l = \theta_0$ ,  $\operatorname{sen} \theta_t = \operatorname{sen} \theta_0 \frac{c_t}{c_l}$ . Si ha per le componenti del tensore di deformazione sulla frontiera del corpo

$$u_{xx} = ik_0 (A_0 + A_l) \cos^2 \theta_0 + iA_t k_t \cos \theta_t \operatorname{sen} \theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0 (A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0 (A_0 - A_l) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{i}{2} A_t k_t (\cos^2 \theta_t - \operatorname{sen}^2 \theta_t)$$

(i fattori comuni esponenziali sono omessi). Le componenti del tensore degli sforzi si calcolano a partire dalla (5,11), che è opportuno riscrivere nella forma

$$\sigma_{ih} = 2\rho c_t^2 u_{ih} + \rho (c_t^2 - 2c_l^2) u_{ll} \delta_{ih}.$$

Le condizioni ai limiti sulla superficie libera del mezzo danno  $\sigma_{ih} n_h = 0$ , quindi  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$  e ne derivano due equazioni che permettono di esprimere  $A_l$  e  $A_t$  in funzione di  $A_0$ :

$$A_l = A_0 \frac{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_t \operatorname{sen} 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_t \operatorname{sen} 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t},$$

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \operatorname{sen} 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_t \operatorname{sen} 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}.$$

Per  $\theta_0 = 0$  si ha  $A_l = -A_0$ ,  $A_t = 0$ , cioè l'onda riflessa è tutta longitudinale. Il rapporto della componente normale alla superficie del mezzo della densità del flusso d'energia, nell'onda longitudinale riflessa, allo stesso flusso nell'onda incidente è

$$R_l = \left| \frac{A_l}{A_0} \right|^2.$$

Analoga relazione si ha per l'onda trasversale riflessa

$$R_t = \left| \frac{c_t \cos \theta_t}{c_l \cos \theta_0} \right| \left| \frac{A_t}{A_0} \right|^2.$$

Ovviamente  $R_l + R_t = 1$ .

2. Stesso problema nel caso in cui l'onda incidente è trasversale (e le vibrazioni sono contenute nel piano di incidenza)<sup>1)</sup>.

*Soluzione.* L'onda riflessa si compone di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale con  $\theta_t = \theta_0$ ,  $c_t \operatorname{sen} \theta_l = c_l \operatorname{sen} \theta_0$ . Il vettore totale spostamento è

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}_{n0}] A_0 e^{ik_0 r} + \mathbf{n}_l A_l e^{ik_l r} + [\mathbf{a}_{t0}] A_t e^{ik_t r}.$$

Si ottiene per le ampiezze delle onde riflesse

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_l \operatorname{sen} 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_l \operatorname{sen} 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{2c_l c_t \operatorname{sen} 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \operatorname{sen} 2\theta_l \operatorname{sen} 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}.$$

3. Determinare le autofrequenze delle vibrazioni radiali di una palla elastica di raggio  $R$ .

*Soluzione.* L'origine è fissata nel centro della palla, le coordinate sono sferiche. Poiché le vibrazioni sono radiali si ha  $\mathbf{u} \equiv u_r(r, t)$ , quindi  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ .

1) Se le vibrazioni sono normali al piano di incidenza, l'onda è riflessa per intero ed è dello stesso tipo, quindi  $R_t = 1$ .

È un'equazione di terzo grado in  $\omega^2$  che ammette, in generale, tre radici distinte. Ciascuna di tali radici definisce la frequenza in funzione del vettore  $\mathbf{k}$ <sup>1)</sup>. Riportando ognuno di questi valori nella (23,2) al posto di  $\omega$ , si ricavano le corrispondenti autosoluzioni  $u_i$  (per meglio dire, visto che il sistema è omogeneo, sono determinati i rapporti tra le tre componenti di  $u_i$  ma non i loro valori assoluti, talché le  $u_i$  possono essere moltiplicate per un fattore comune).

La velocità di propagazione dell'onda (*velocità di gruppo*) è data dalla derivata della frequenza rispetto al vettore d'onda. Nel corpo isotropo la frequenza è proporzionale al valore assoluto di  $\mathbf{k}$ , la direzione della velocità  $\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  coincide quindi con quella di  $\mathbf{k}$ . Nei cristalli tale relazione non sussiste e quindi la direzione di propagazione non può essere assunta parallela a quella del vettore d'onda.

L'equazione (23,3) mostra che  $\omega$  è una funzione omogenea del primo ordine delle componenti  $k_i$  di  $\mathbf{k}$  (se si introduce come incognita  $\omega/k$ , i coefficienti dell'equazione non dipendono da  $k$ ). Allora, la velocità di propagazione  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  è una funzione omogenea di grado zero in  $k_i$ ; la velocità dell'onda, essendo funzione della sua direzione, non dipende dalla frequenza.

In virtù delle tre differenti relazioni tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$ , si hanno in generale, per ogni direzione nel cristallo, tre velocità di propagazione distinte delle onde elastiche. Queste velocità coincidono solo in certe direzioni eccezionali.

In un mezzo isotropo a due velocità di propagazione diverse corrispondono onde puramente longitudinali e puramente trasversali. Al contrario, in un cristallo, a ciascuna velocità di propagazione corrisponde un'onda, il cui vettore spostamento ha tante componenti parallele quante componenti perpendicolari alla direzione di propagazione.

Infine un'osservazione. Per ogni vettore d'onda dato  $\mathbf{k}$  si possono avere nel cristallo tre onde (con differenti frequenze e velocità di propagazione). È facile vedere che i vettori spostamento  $\mathbf{u}$  in queste tre onde sono ortogonali. Infatti, fissato  $\mathbf{k}$ , la (23,3) può essere considerata come l'equazione che determina i valori principali  $\rho \omega^2$  del tensore simmetrico (sugli indici  $i, m$ ) di rango due  $\lambda_{iklm} k_h k_l$ <sup>2)</sup>. Le equazioni (23,2) determinano allora le direzioni principali di questo tensore che, come è noto, sono ortogonali.

<sup>1)</sup> In un corpo isotropo questa equazione dà un risultato noto: una soluzione  $\omega^2 = c_f^2 k^2$  e due soluzioni coincidenti  $\omega^2 = c_i^2 k^2$ .

<sup>2)</sup> In virtù delle proprietà di simmetria di  $\lambda_{iklm}$ , si ha

$$\lambda_{iklm} k_h k_l = \lambda_{kiml} k_h k_l = \lambda_{mlki} k_h k_l.$$

L'ultima espressione si distingue da  $\lambda_{mkli} k_h k_l$  solo per gli indici muti  $k$  ed  $l$ , e quindi resta provato che il tensore  $\lambda_{iklm} k_h k_l$  è effettivamente simmetrico.

### § 23. Onde elastiche nei cristalli

La propagazione delle onde elastiche in un mezzo anisotropo, cioè nei cristalli, è descritta da leggi più complesse di quelle relative alla propagazione in un mezzo isotropo. Studiando tali onde si dovrà partire dalle equazioni generali

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

e per  $\sigma_{ik}$  si utilizzerà l'espressione generale (10,3):

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}.$$

Concordemente con quanto detto nel paragrafo precedente, si intenderà ovunque con  $\lambda_{iklm}$  i corrispondenti valori adiabatici dei moduli di elasticità.

Sostituendo nelle equazioni del moto  $\sigma_{ik}$ , si ha

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{ihlm}}{2} \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_h \partial x_m} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_h \partial x_l}. \end{aligned}$$

Il tensore  $\lambda_{iklm}$  è simmetrico sugli indici  $l$  ed  $m$ , quindi i due termini nel secondo membro sono uguali e le equazioni del moto diventano

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_h \partial x_l}. \quad (23,1)$$

Consideriamo un'onda elastica monocromatica in un cristallo; si tratta cioè di trovare la soluzione dell'equazione del moto nella forma

$$u_i = u_{0i} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

( $u_{0i}$  sono delle costanti); il legame tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  deve essere definito in modo tale che la funzione così scritta soddisfi effettivamente la (23,1). La derivazione di  $u_i$  rispetto al tempo fa comparire il fattore  $-i\omega$  e quella rispetto a  $x_h$  il fattore  $ik_h$ . Allora, dopo la sostituzione, la (23,1) diventa

$$\rho \omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_h k_l u_m.$$

Scrivendo  $u_i = \delta_{im} u_m$ , ricopiamo l'uguaglianza nella forma

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - \lambda_{iklm} k_h k_l) u_m = 0. \quad (23,2)$$

È un sistema di tre equazioni omogenee di primo grado rispetto alle incognite  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Questo sistema ammette soluzioni non banali solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo; deve cioè avversi

$$|\lambda_{iklm} k_h k_l - \rho \omega^2 \delta_{im}| = 0. \quad (23,3)$$

Se  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$ , l'equazione ha una soluzione periodica, cioè a dire si tratta di un'onda piana ordinaria che non subisce smorzamenti, in alcuna parte del corpo. Considereremo dunque il caso per cui  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ . Si hanno soluzioni del tipo

$$f(z) = \text{cost} \cdot \exp\left(\pm z \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right);$$

la soluzione col segno meno nell'esponente corrisponde ad una deformazione che cresce indefinitamente con la profondità (cioè per  $z < 0$ ); una soluzione siffatta non ha senso e quindi manterremo solo il segno più davanti all'esponente.

Dunque ci siamo ridotti a considerare la soluzione

$$u = \text{cost} \cdot e^{i(kz - \omega t)} e^{\kappa z}, \quad (24,2)$$

dove

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (24,3)$$

Questa corrisponde ad un'onda che si smorza rapidamente con la quota, cioè appunto un'onda che si propaga solo in prossimità della superficie.  $\kappa$  definisce la velocità di tale smorzamento.

Il vettore di deformazione  $\mathbf{u}$  è la somma dei due vettori  $\mathbf{u}_l$  e  $\mathbf{u}_t$  e ciascuna delle componenti di questi vettori soddisfa l'equazione (24,1) con velocità  $c = c_l$  per  $\mathbf{u}_l$  e  $c = c_t$  per  $\mathbf{u}_t$ . Nel caso di onde di volume in un mezzo illimitato, queste due componenti sono onde che si propagano indipendentemente le une dalle altre, ma nel caso di onde superficiali una siffatta separazione in due parti indipendenti non può avversi (a causa dell'esistenza delle condizioni ai limiti). Il vettore  $\mathbf{u}$  deve essere una combinazione lineare di  $\mathbf{u}_l$  e  $\mathbf{u}_t$ . Questi due vettori perdono il significato intuitivo di componenti dello spostamento parallelo e normale alla direzione di propagazione.

Per trovare la combinazione lineare di  $\mathbf{u}_l$  e  $\mathbf{u}_t$ , che fornisce il vero spostamento  $\mathbf{u}$ , si dovrà far ricorso alle condizioni ai limiti sulla frontiera del corpo. Queste forniscono anche il legame tra il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e la frequenza  $\omega$ , e quindi la velocità di propagazione dell'onda. Sulla superficie libera deve avversi  $\sigma_{ik} n_k = 0$ . La normale  $\mathbf{n}$  è diretta parallelamente all'asse  $z$ , dunque

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

da cui

$$u_{xz} = 0, u_{yz} = 0, \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma) u_{zz} = 0. \quad (24,4)$$

Tutte le grandezze sono indipendenti da  $y$ , quindi la seconda di queste condizioni diviene

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

## PROBLEMA

Trovare la dipendenza dalla frequenza del vettore d'onda, per onde elastiche che si propagano in un cristallo del sistema esagonale.

*Soluzione.* Le componenti non nulle di  $\lambda_{ijklm}$ , nelle coordinate  $x, y, z$ , sono legate alle componenti nelle « coordinate »  $\xi, \eta, z$  (cfr. § 10) dalle relazioni

$$\begin{aligned}\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} &= a + b, & \lambda_{xxyy} = a - b, & \lambda_{xyxy} = b, \\ \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyzz} &= c, & \lambda_{xxzz} = \lambda_{yzyz} = d, & \lambda_{zzzz} = f,\end{aligned}$$

dove si è posto

$$4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} = a, \quad 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta} = b, \quad 2\lambda_{\xi\eta\zeta\zeta} = c, \quad 2\lambda_{\xi\zeta\eta\zeta} = d.$$

L'asse  $z$  è diretto lungo l'asse di simmetria del sesto ordine, la direzione degli assi  $x$  e  $y$  è arbitraria. Sceglieremo il piano  $x, z$  in modo che contenga  $\mathbf{k}$ . Allora

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \theta,$$

$\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{k}$  e l'asse delle  $z$ . Scrivendo la (23,3) e risolvendo segue:

$$\omega_1^2 = \frac{k^2}{\rho} (b \sin^2 \theta + d \cos^2 \theta),$$

$$\begin{aligned}\omega_{2,3}^2 &= \frac{k^2}{2\rho} \{ (a+b) \sin^2 \theta + f \cos^2 \theta + d \pm \\ &\pm \sqrt{[(a+b-d) \sin^2 \theta + (d-f) \cos^2 \theta]^2 + 4(c+d)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}\}.\end{aligned}$$

**§ 24. Onde superficiali**

Le onde che si propagano nelle vicinanze della superficie di un corpo, senza penetrare nel suo interno (*onde di Rayleigh*), costituiscono un particolare tipo di onde elastiche.

Scriviamo le equazioni del moto nella forma (22,11) e (22,12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (24,1)$$

( $u$  è una qualunque delle componenti dei vettori  $\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_t$ , e  $c$  la corrispondente velocità,  $c_l$  o  $c_t$ ) e cerchiamo le soluzioni corrispondenti a tali onde superficiali. Supponiamo la superficie del mezzo elastico piana (e illimitata); assumiamola come piano  $x, y$  e supponiamo  $z < 0$  nel mezzo.

Consideriamo un'onda superficiale monocromatica « piana », che si propaga lungo l'asse  $x$ . Scriveremo per  $u$

$$u = e^{i(kx - \omega t)} f(z).$$

Sostituendo tale espressione nella (24,1), si ha per  $f(z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f.$$

Sostituendo

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz},$$

la prima delle (24,8) dà

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0, \quad (24,9)$$

la seconda

$$2ac_t^2\kappa_t k + b[c_t^2(\kappa_t^2 - k^2) + 2c_t^2k^2] = 0.$$

Dividendo questa equazione per  $c_t^2$  e sostituendo

$$\kappa_t^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_t^2} = -(k^2 - \kappa_t^2)\frac{c_t^2}{c_l^2},$$

la riscriviamo nella forma

$$2a\kappa_t k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \quad (24,10)$$

Le due equazioni omogenee (24,9), (24,10) sono compatibili se

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2\kappa_t\kappa_l$$

ovverosia, quadrando e sostituendo i valori di  $\kappa_t^2$ ,  $\kappa_l^2$

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \quad (24,11)$$

Si ha così un legame tra  $\omega$  e  $k$ . Conviene scrivere

$$\omega = c_t k \xi. \quad (24,12)$$

Allora  $k^2$  si elimina ed otteniamo per  $\xi$  l'equazione

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0 \quad (24,13)$$

che mostra che  $\xi$  è un numero che dipende solo dal rapporto  $\frac{c_t}{c_l}$ , costante caratteristica della sostanza data, funzione del solo modulo di Poisson:

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}.$$

Ovviamente  $\xi$  deve essere positiva ed anche  $< 1$  (affinché  $\kappa_t$  e  $\kappa_l$  siano reali). L'equazione (24,13) ammette una sola radice soddisfacente tali condizioni e pertanto per ogni fissato valore di  $c_t/c_l$  si ottiene un solo valore di  $\xi$ .

Così, come per le onde di volume, anche per le onde superficiali constatiamo che la frequenza è proporzionale al vettore d'onda. Il coefficiente di proporzionalità è la velocità di propagazione

$$U = c_t \xi. \quad (24,14)$$

Quest'ultima determina la velocità di propagazione delle onde superficiali in funzione delle velocità  $c_t$  e  $c_l$  delle onde di volume

Tenuto conto della (24,2), segue:

$$u_y = 0. \quad (24,5)$$

Quindi in un'onda superficiale il vettore di deformazione  $\mathbf{u}$  è contenuto nel piano della direzione di propagazione e perpendicolare alla superficie.

La parte « trasversale » dell'onda  $\mathbf{u}_t$  deve soddisfare alle condizioni (22,8)  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ , quindi

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

La dipendenza di  $u_{tx}$  e  $u_{tz}$  da  $x$  e  $z$  è determinata dal fattore  $e^{ikx+\kappa_t z}$ , dove  $\kappa_t$  è dato dalla (24,3) con  $c = c_t$ , cioè

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}.$$

La condizione sopra scritta dà allora

$$iku_{tx} + \kappa_t u_{tz} = 0$$

$$\frac{u_{tx}}{u_{tz}} = -\frac{\kappa_t}{ik}.$$

Quindi si può scrivere

$$u_{tx} = \kappa_t a e^{ikx+\kappa_t z - i\omega t}, \quad u_{tz} = -ikae^{ikx+\kappa_t z - i\omega t}, \quad (24,6)$$

dove  $a$  è una costante.

La parte « longitudinale »  $\mathbf{u}_l$  soddisfa la condizione (22,9)  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$ , ovvero

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

quindi

$$iku_{lz} - \kappa_l u_{lx} = 0 \quad (\kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}).$$

Si deve allora avere

$$u_{lx} = kbe^{ikx+\kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa_l b e^{ikx+\kappa_l z - i\omega t}, \quad (24,7)$$

dove  $b$  è una costante.

Utilizziamo ora la prima e la terza condizione (24,4). Esprimendo  $u_{ik}$  in termini delle derivate di  $u_i$  e introducendo le velocità  $c_l$  e  $c_t$ , riscriviamo tali condizioni

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad (24,8)$$

$$c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0.$$

superficie di separazione dei due mezzi ( $z = 0$ )

$$u_{y1} = u_{y2}, \quad \mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

( $\mu_1, \mu_2$  sono i moduli di scorrimento nei relativi mezzi). Da queste condizioni derivano tre equazioni per  $A, B, C$  e la condizione di compatibilità dà

$$\operatorname{tg} \kappa_1 h = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1}.$$

Questa equazione definisce implicitamente  $\omega$  in funzione di  $k$ , e ammette soluzioni solo per  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  reali, talché  $c_{t2} > \frac{\omega}{k} > c_{t1}$ . Questo dimostra che la propagazione è possibile solo se  $c_{t2} > c_{t1}$ .

### *§ 25. Vibrazioni di sbarre e lamine*

Le onde che si propagano nelle lamine e nelle sbarre sottili si distinguono necessariamente da quelle che si propagano in un mezzo in tutte le direzioni illimitato. Naturalmente ci si riferisce al caso di onde la cui lunghezza d'onda sia grande rispetto allo spessore della lamina o della sbarra. Nel caso opposto, di onde le cui lunghezze d'onda sono piccole rispetto allo spessore della sbarra o della lamina, queste possono venire assimilate ad un mezzo illimitato in tutte le direzioni e quindi si ritrovano quelle relazioni che sono già state stabilite per un mezzo siffatto.

Converrà distinguere le onde con vibrazioni parallele all'asse della sbarra o al piano della lamina dalle onde con vibrazioni trasversali. Cominciamo col trattare il primo caso.

Una deformazione longitudinale di una sbarra (si tratta di una deformazione uniforme su tutta la sezione), la cui superficie laterale non è soggetta a forze esterne, è una trazione o compressione semplici. Pertanto, le onde longitudinali nella sbarra sono trazioni o compressioni semplici propagantesi lungo l'asse della sbarra. Ora, nel caso di una trazione semplice, è diversa da zero solo la componente  $\sigma_{zz}$  del tensore degli sforzi (l'asse  $z$  coincide con quello della sbarra), ed il legame tra questa componente ed il tensore di deformazione è (§ 5)

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Sostituendo nell'equazione generale del moto

$$\rho \ddot{u}_z = -\frac{\partial \sigma_{zh}}{\partial x_h},$$

si ha

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0, \quad (25,1)$$

trasversali e longitudinali. Il rapporto delle ampiezze della parte trasversale e longitudinale dell'onda è dato, noto il valore di  $\xi$ , dalla

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (24,15)$$

Il rapporto  $c_t/c_l$  varia per diverse sostanze tra  $1/\sqrt{2}$  e 0, che corri-

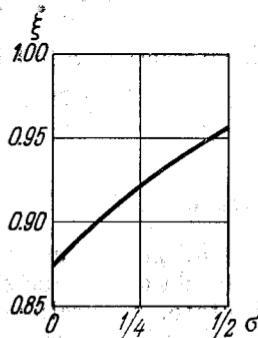


Fig. 21

sponde a variazioni di  $\sigma$  tra 0 e  $1/2$ . Allora per  $\xi$  si ha l'intervalle [0,874; 0,955]. La fig. 21 fornisce il grafico di  $\xi$  in funzione di  $\sigma$ .

### P R O B L E M A

Uno strato a facce piane parallele, di spessore  $h$  (mezzo 1), poggia su un semispazio elastico (mezzo 2). Determinare la frequenza in funzione del vettore d'onda per onde trasversali entro lo strato, nel caso di vibrazioni parallele alle facce.

*Soluzione.* Prendiamo il piano  $x, y$  coincidente col piano di separazione tra strato e semispazio, al semispazio elastico facciamo corrispondere i valori negativi di  $z$ ; di conseguenza  $h \geq z \geq 0$  nello strato. Ivi si ha

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \quad u_{y1} = f(z) e^{i(kx - \omega t)}$$

e per l'onda che si smorza nel mezzo 2

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \quad u_{y2} = A e^{\kappa_2 z} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}}.$$

Si ha per  $f(z)$  l'equazione

$$f'' + \kappa_1^2 f = 0, \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2}$$

(si vedrà che  $\kappa_1^2 > 0$ ), quindi

$$f(z) = B \sin \kappa_1 z + C \cos \kappa_1 z.$$

Sulla superficie libera dello strato ( $z = h$ ) si ha  $\sigma_{zy} = 0$ , cioè  $\frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = 0$  e sulla

Le equazioni di tali vibrazioni libere di una lamina possono scriversi direttamente partendo dall'equazione dell'equilibrio (12,5).

A tal fine bisogna sostituire  $-P$  con il prodotto dell'accelerazione  $\ddot{\zeta}$  e della densità superficiale  $\rho h$ . Si ha

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta = 0 \quad (25,6)$$

( $\Delta$  è qui l'operatore di Laplace bidimensionale).

Consideriamo un'onda elastica monocromatica e cerchiamo, di conseguenza, una soluzione della (25,6) nella forma

$$\zeta = \text{cost.} \cdot e^{i(kr - \omega t)} \quad (25,7)$$

(beninteso, il vettore d'onda  $k$  ha solo due componenti,  $k_x$  e  $k_y$ ). Sostituendo nella (25,6), otteniamo

$$-\rho \omega^2 + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)} k^4 = 0,$$

da cui discende la relazione tra frequenza e vettore d'onda

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (25,8)$$

Risulta di qui che la frequenza è proporzionale al quadrato del modulo del vettore d'onda, mentre si ricorda che in un mezzo illimitato la relazione era lineare.

Nota la relazione tra frequenza e vettore d'onda, se ne deduce la velocità di propagazione dell'onda

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}.$$

Le derivate di  $k^2$  rispetto a  $k_x$  e  $k_y$  danno rispettivamente  $2k_x$  e  $2k_y$ , quindi si ha

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{h^2 E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \mathbf{k}. \quad (25,9)$$

Dunque  $\mathbf{U}$  risulta essere proporzionale al vettore d'onda, contrariamente a quanto avviene in un mezzo illimitato, laddove essa è costante<sup>1)</sup>

Analoghi risultati si conseguono nello studio delle onde di flessione nelle sbarre sottili. Supporremo che le vibrazioni di flessione nella sbarra siano deboli; le relative equazioni del moto si ottengono sostituendo nelle equazioni di equilibrio della sbarra debolmente flessa (20,4)  $-K_x$ ,  $-K_y$  con i prodotti delle accelerazioni  $\ddot{X}$ ,  $\ddot{Y}$ ,

<sup>1)</sup> Il vettore d'onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda; dunque la velocità di propagazione dovrebbe divergere per  $\lambda \rightarrow 0$ . Questo risultato, assurdo da un punto di vista fisico, consegue dal fatto che la (25,9) non estende la sua validità al campo delle onde corte.

moltiplicate per la densità lineare di massa  $\rho S$  ( $S$  è l'area della sezione). Si ha

$$\rho S \ddot{X} = EI_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \quad \rho S \ddot{Y} = EI_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \quad (25,10)$$

Ricerchiamone le soluzioni nella forma

$$X = \text{cost} \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \quad Y = \text{cost} \cdot e^{i(kz - \omega t)}.$$

Sostituendo nella (25,10), si ottengono le seguenti relazioni tra frequenza e vettore d'onda:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k^2 \quad (25,11)$$

rispettivamente per le vibrazioni nella direzione  $x$  e  $y$ . Corrispondentemente si hanno le velocità di propagazione

$$U^{(x)} = 2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k, \quad U^{(y)} = 2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S}} k. \quad (25,12)$$

Da ultimo consideriamo il caso particolare delle vibrazioni di torsione. Le equazioni del moto in una sbarra per tali vibrazioni si ottengono ugualando  $C \frac{\partial \tau}{\partial z}$  (cfr. § 18) alla derivata rispetto al tempo del momento cinetico della sbarra per unità di lunghezza. Questo momento è uguale a  $\rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , dove  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  è la velocità angolare di rotazione ( $\varphi$  è l'angolo di rotazione della sezione della sbarra in esame) e  $I = \int (x^2 + y^2) df$  il momento d'inerzia di detta sezione rispetto al centro d'inerzia (nelle vibrazioni di torsione pura ogni sezione della sbarra effettua vibrazioni rotatorie attorno all'asse d'inerzia che è fisso). Scrivendo  $\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  si ha l'equazione del moto nella forma

$$C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25,13)$$

Si vede che le vibrazioni di torsione si propagano lungo la sbarra con velocità

$$\sqrt{\frac{C}{\rho I}}. \quad (25,14)$$

### PROBLEMI

1. Trovare le autofrequenze delle vibrazioni longitudinali di una sbarra, di lunghezza  $l$ , con una estremità incastrata e l'altra libera.

*Soluzione.* Nell'estremità incastrata ( $z = 0$ ) deveaversi  $u_z = 0$  e nell'estremità libera ( $z = l$ )  $\sigma_{zz} = E u_{zz} = 0$ , cioè  $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ . Cerchiamo la soluzione

dell'equazione (25,1) nella forma  $u_z = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz$ , con  $k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ . Dalla condizione in  $z = l$  si ha  $\cos kl = 0$  e quindi per le autofrequenze

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{2l} (2n+1),$$

dove  $n$  è un intero.

2. Stesso problema per una sbarra con entrambe le estremità libere o incastrate.

*Soluzione.* In entrambi i casi

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{l} n.$$

3. Trovare le autofrequenze delle vibrazioni di una corda di lunghezza  $l$ .

*Soluzione.* L'equazione del moto è

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

(cfr. l'equazione dell'equilibrio (20,17)). Condizioni ai limiti  $X = 0$  per  $z = 0, l$ . Autofrequenze

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S}{T}} \frac{n\pi}{l}.$$

4. Trovare le autofrequenze delle vibrazioni trasversali di una sbarra di lunghezza  $l$ , con estremità incastrate.

*Soluzione.* Ponendo

$$X = X_0(z) \cos(\omega t + \alpha)$$

nell'equazione (25,10), si ha

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \kappa^4 X_0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI_y}.$$

L'integrale generale è

$$X_0 = A \cos \kappa z + B \sin \kappa z + C \operatorname{ch} \kappa z + D \operatorname{sh} \kappa z.$$

Le costanti  $A, B, C, D$  sono determinate dalle condizioni ai limiti  $X = 0, \frac{dX}{dz} = 0$  per  $z = 0, l$ . Si ha

$$X_0 = A \{ (\operatorname{sen} \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l) (\operatorname{cos} \kappa z - \operatorname{ch} \kappa z) -$$

$$- (\operatorname{cos} \kappa l - \operatorname{ch} \kappa l) (\operatorname{sen} \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z) \},$$

e l'equazione

$$\operatorname{cos} \kappa l \operatorname{ch} \kappa l = 1$$

determina con le sue radici le autofrequenze delle vibrazioni. La più piccola tra queste è

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

5. Stesso problema per una sbarra con estremità appoggiate.

*Soluzione.* La soluzione è analoga a quella del problema 4. Si ha

$$X_0 = A \operatorname{sen} \kappa z$$

e le autofrequenze sono determinate da  $\operatorname{sen} \kappa l = 0$ , cioè

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La frequenza minima è data da

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

6. Stesso problema per una sbarra con una estremità incastrata e l'altra libera.

*Soluzione.* Si ha per lo spostamento

$X_0 = A \{ (\cos \kappa l + \operatorname{ch} \kappa l) (\cos \kappa z - \operatorname{ch} \kappa z) + (\operatorname{sen} \kappa l - \operatorname{sh} \kappa l) (\operatorname{sen} \kappa z - \operatorname{sh} \kappa z) \}$   
(l'estremità incastrata è in  $z = 0$ , l'altra in  $z = l$ ), e l'equazione

$$\cos \kappa l \operatorname{ch} \kappa l + 1 = 0$$

per le autofrequenze. La frequenza minima è

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}.$$

7. Trovare le autofrequenze delle vibrazioni di una lamina rettangolare (lati  $a$  e  $b$ ) a bordi appoggiati.

*Soluzione.* Sostituendo

$$\xi = \xi_0(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

nell'equazione (25,6) si ha

$$\Delta \Delta \xi_0 - \kappa^4 \xi_0 = 0, \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{h^2 E}.$$

Prendiamo i lati della lamina come assi coordinati; le condizioni ai limiti (12,11) diventano

$$\text{per } x=0, a \quad \xi = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{per } y=0, b \quad \xi = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0.$$

La soluzione che soddisfa tali condizioni è

$$\xi_0 = A \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

( $m, n$  sono interi), le frequenze sono

$$\omega = h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}} \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

8. Trovare le autofrequenze delle vibrazioni di una membrana rettangolare (lati  $a$  e  $b$ ).

*Soluzione.* Equazione delle vibrazioni della membrana

$$T \Delta \xi = \rho h \ddot{\xi}$$

(cfr. l'equazione di equilibrio (14,9)). I bordi della membrana debbono essere fissati in modo che  $\xi = 0$ . La soluzione corrispondente è

$$\xi = A \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t$$

e le autofrequenze

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

( $m, n$  interi).

9. Trovare la velocità di propagazione delle vibrazioni di torsione in sbarre aventi per sezione rispettivamente un cerchio, un'ellisse, un triangolo equilatero, e in una sbarra avente la forma di una lamina sottile rettangolare molto allungata.

*Soluzione.* Per la sezione circolare (raggio  $R$ ), il momento di inerzia è  $I = \frac{\pi R^4}{2}$ ; prendendo  $C$  nel problema 1, § 16, si ha per la velocità di propagazione  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , coincidente con  $c_t$ .

Ugualmente (utilizzando i risultati dei problemi 2-4, § 16), si ha per la sbarra a sezione ellittica la velocità

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

per la sbarra con sezione a forma di un triangolo equilatero

$$\sqrt{\frac{3\mu}{5\rho}},$$

per la sbarra a forma di lamina rettangolare allungata

$$2 \frac{h}{d} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Tutte queste velocità sono più basse di  $c_t$ .

10. La superficie di un liquido incompressibile infinitamente profondo è ricoperta da una lamina elastica sottile. Dedurre il legame tra il vettore d'onda e la frequenza per onde propagantesi simultaneamente nella lamina e nello strato superficiale del liquido.

*Soluzione.* Si sceglie il piano della lamina come piano  $z = 0$ , asse  $x$  come direzione di propagazione,  $z < 0$  nel liquido. Allora, l'equazione del moto si scrive, in queste coordinate, per la lamina libera, nella forma

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

( $\rho_0$  è la densità del materiale della lamina). In presenza del liquido, bisogna aggiungere a secondo membro di questa equazione un termine che dia la forza con cui il liquido agisce su 1  $\text{cm}^2$  della lamina, cioè la pressione  $p$  del liquido. La pressione nell'onda si esprime per mezzo del potenziale della velocità con

$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  (si trascura il campo di gravità). Allora si ha

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

La componente normale della velocità del liquido sulla sua superficie deve essere uguale alla velocità dei punti della lamina, quindi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Il potenziale  $\varphi$  deve soddisfare in tutto il volume del liquido alla

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Cerchiamo  $\zeta$  nella forma  $\zeta = \zeta_0 e^{i(kx-\omega t)}$ . Conseguentemente assumeremo come soluzione della (3) un'onda superficiale smorzantesi in profondità  $\varphi = \varphi_0 e^{i(kx-\omega t)} e^{-kz}$ . Sostituendo queste espressioni nelle (1) e (2), otteniamo due

equazioni per  $\varphi_0$  e  $\zeta_0$ , e dalla condizione di compatibilità si deduce

$$\omega^2 = \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \frac{k^5}{(\rho + h\rho_0 k)}.$$

### § 26. Vibrazioni anarmoniche

Tutta la teoria che abbiamo sin qui esposto sulle vibrazioni elastiche è approssimata, nello stesso senso in cui è approssimata la trattazione della teoria dell'elasticità fondata sulla legge di Hooke. Ricordiamo che per quest'ultima si parte dalla sviluppabilità in serie di potenze del tensore di deformazione dell'energia elastica, e ci si arresta ai termini del secondo ordine inclusi. Di conseguenza le componenti del tensore degli sforzi sono funzioni lineari delle componenti del tensore di deformazione, e le equazioni del moto sono lineari.

In questa approssimazione, la connotazione più rilevante per un'onda è che essa può essere rappresentata da una semplice sovrapposizione, cioè da una combinazione lineare di onde monocromatiche. Ognuna di queste si propaga indipendentemente dalle altre e può così esistere sola, senza essere accompagnata da altri movimenti, di qualsiasi natura. Altrimenti detto, le diverse onde monocromatiche che si propagano simultaneamente nello stesso mezzo « non interagiscono ».

Tutte queste proprietà cessano di esistere non appena si passi all'approssimazione successiva. Benché siano piccoli, gli effetti delle approssimazioni successive possono giocare un ruolo dominante per determinati fenomeni. Questi termini sono di solito denominati *anarmonici*, in quanto le equazioni del moto corrispondenti non sono lineari e non ammettono quindi soluzioni periodiche (armoeniche) semplici.

Considereremo qui effetti anarmonici del terzo ordine, indotti dai termini cubici, rispetto alla deformazione, nell'energia elastica. Sarebbe oneroso scrivere nella forma generale le corrispondenti equazioni del moto. Tuttavia si può mettere in luce il carattere di tali effetti con questi ragionamenti. I termini cubici nell'energia elastica danno origine a termini quadratici nel tensore degli sforzi e quindi anche nelle equazioni del moto. Sistemiamo in queste equazioni i termini lineari a primo membro, quelli quadratici a secondo. Risolvendo col metodo perturbativo, in prima approssimazione restiamo solo con i termini lineari, cioè con equazioni lineari la cui soluzione  $\mathbf{u}_0$  può essere rappresentata da una sovrapposizione di onde monocromatiche della forma  $\text{cost.} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$ , con certe relazioni tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$ . Passando alla successiva approssimazione, si scriverà  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ , e nel secondo membro (dove figurano i termini quadratici) si conserveranno solo i termini in  $\mathbf{u}_0$ . Poiché  $\mathbf{u}_0$  è soluzione delle equazioni di prima approssimazione, cioè delle equazioni

lineari omogenee, nei primi membri delle uguaglianze i termini con  $u_0$  si elidono mutuamente. In definitiva ci si ritrova con un sistema di equazioni lineari non omogenee nelle componenti di  $u_i$ , in cui i secondi membri contengono solo funzioni assegnate delle coordinate e del tempo. Queste funzioni, che si ottengono sostituendo  $u_0$  nei secondi membri delle equazioni di partenza, sono somme di termini ciascuno proporzionale ad un fattore della forma  $e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]}$ , ovvero, alternativamente ad un fattore della forma  $e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]}$ , con  $\omega_1, \omega_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  frequenze e vettori d'onda di due onde monocromatiche qualsivoglia, di prima approssimazione.

E' noto che un integrale particolare di equazioni siffatte è la somma dei termini contenenti gli stessi fattori esponenziali che figurano nei secondi membri, con opportuni coefficienti. Ciascuno di tali termini corrisponde ad un'onda che si propaga con una frequenza  $\omega_1 \pm \omega_2$  e con un vettore d'onda  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$  (le frequenze uguali a somme o differenze di frequenze delle onde iniziali sono dette *frequenze di combinazione*).

Allora, l'anarmonicità del terzo ordine conduce ad una sovrapposizione all'insieme delle onde monocromatiche fondamentali (di frequenze  $\omega_1, \omega_2, \dots$  e vettori d'onda  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$ ) di «onde» di debole intensità con frequenze di combinazione  $\omega_1 \pm \omega_2$  e vettori d'onda  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ . Abbiamo messo le virgolette, perché queste «onde» rappresentano termini correttivi e non possono sussistere di per sé (tranne casi particolari; vedi qui sotto). Osserviamo che in generale per le frequenze  $\omega_1 \pm \omega_2$  e i vettori d'onda  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$  non sussistono più le relazioni che vi sono tra le corrispondenti grandezze delle onde monocromatiche ordinarie.

Ma, naturalmente, si possono avere valori particolari di  $\omega_1, \omega_2$  e  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  per i quali le somme (per fissare le idee ci limiteremo alle somme)  $\omega_1 + \omega_2$  e  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  soddisfano ad una delle relazioni che debbono essere verificate dalle onde monocromatiche nel mezzo dato. Ponendo  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  e  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , si può dire, dal punto di vista matematico, che  $\omega_3$  e  $\mathbf{k}_3$  corrispondono in questo caso ad onde che soddisfano le equazioni lineari omogenee del moto della prima approssimazione. Se nei secondi membri delle equazioni del moto di seconda approssimazione compaiono termini proporzionali a  $e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)}$ , con  $\omega_3$  e  $\mathbf{k}_3$  siffatti, allora si sa che l'integrale particolare di queste equazioni è un'onda con questa frequenza e con un'ampiezza che cresce indefinitamente nel tempo.

Dunque, la sovrapposizione di due onde monocromatiche  $\omega_1, \mathbf{k}_1$  e  $\omega_2, \mathbf{k}_2$ , per cui le somme  $\omega_3, \mathbf{k}_3$  soddisfano alla condizione detta, conduce, a seguito di effetti di anarmonicità, ad un fenomeno di risonanza, cioè nasce una nuova vera onda monocromatica  $\omega_3, \mathbf{k}_3$  con un'ampiezza che cresce nel tempo e che quindi, alla lunga, cessa di essere piccola. È evidente che se la sovrapposizione delle onde

$\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  e  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  dà l'onda  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$ , la sovrapposizione delle onde  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  e  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  condurrà ugualmente alla risonanza e darà luogo all'onda  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$ , mentre dalla sovrapposizione delle onde  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  risulterà l'onda  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ .

Ora, in un corpo isotropo la relazione tra  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  è  $\omega = c_t k$ , oppure  $\omega = c_t k$  con  $c_t > c_s$ . È facile vedere quando può realizzarsi una di queste condizioni per ciascuna delle tre onde:  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ ;  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Se  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  non sono collineari allora  $k_3 < k_1 + k_2$  e quindi risulta chiaro che per siffatti vettori d'onda la risonanza si presenta in due soli casi: 1) le onde  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  e  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  sono trasversali e l'onda  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  longitudinale; 2) una delle due onde  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$  o  $\omega_2$ ,  $\mathbf{k}_2$  è longitudinale, l'altra trasversale e l'onda  $\omega_3$ ,  $\mathbf{k}_3$  è longitudinale. Se i vettori  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  sono collineari, si ha possibilità di risonanza quando tutte e tre le onde sono longitudinali o trasversali.

L'effetto d'anarmonicità con fenomeno di risonanza appare non solo a seguito della sovrapposizione di diverse onde monocromatiche, ma anche nel caso di una sola onda  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ . Allora, a secondo membro delle equazioni del moto si hanno termini proporzionali a  $e^{2i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)}$ . Ma se la relazione è verificata per la coppia  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ , allora (in vista del fatto che essa è lineare) viene soddisfatta anche dalla coppia  $2\omega_1$ ,  $2\mathbf{k}_1$ . Nascono così a fianco delle onde monocromatiche già esistenti  $\omega_1$ ,  $\mathbf{k}_1$ , a seguito dell'effetto d'anarmonicità, onde  $2\omega_1$ ,  $2\mathbf{k}_1$  con frequenza e vettore d'onda doppi e la cui ampiezza cresce col tempo.

Infine delineiamo come si possono formare le equazioni del moto tenendo conto dei termini anarmonici. Il tensore di deformazione deve ora essere determinato dall'espressione completa (1,3)

$$u_{ih} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_h} \right), \quad (26,1)$$

dove non si possono più trascurare i termini quadratici in  $u_i$ . Si scriverà quindi l'espressione generale della densità d'energia  $\mathcal{E}$ <sup>1)</sup> per i corpi, con simmetria data, nella forma di uno scalare formato con le componenti del tensore  $u_{ih}$  e di certi tensori costanti, caratteristici della sostanza costituente il corpo, facendo figurare la potenza di  $u_{ih}$  richiesta. Sostituendo quindi l'espressione (26,1) di  $u_{ih}$  e trascurando i termini con potenze troppo elevate di  $u_i$  si ottiene l'energia  $\mathcal{E}$  in funzione delle derivate  $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$ , con la precisione richiesta.

Per dedurre le equazioni del moto osserviamo che la variazione  $\delta\mathcal{E}$  può scriversi

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right)} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_h}$$

<sup>1)</sup> Si ha qui in vista l'energia interna  $\mathcal{E}$ , e non l'energia libera  $F$ , poiché si tratta di vibrazioni adiabatiche.

ovvero, introducendo

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (26,2)$$

nel modo seguente:

$$\delta \mathcal{E} = \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) - \delta u_i \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_k}.$$

I coefficienti di  $-\delta u_i$  sono le componenti della forza per unità di volume del corpo; formalmente mantengono la loro forma originaria e le equazioni del moto vengono nuovamente scritte come

$$\rho_0 \ddot{u}_i = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (26,3)$$

$\rho_0$  è la densità del corpo non deformato; le componenti del tensore  $\sigma_{ik}$  sono ora date dalla (26,2) dove  $\mathcal{E}$  è scritta con la precisione richiesta. Si noti che il tensore  $\sigma_{ik}$  non è più simmetrico<sup>1)</sup>.

### PROBLEMA

Scrivere l'espressione generale dell'energia elastica di un corpo isotropo nell'approssimazione del terzo ordine.

*Soluzione.* A partire dalle componenti di un tensore simmetrico di rango due si possono costruire due scalari quadratici ( $u_{ik}^2$  e  $u_{ll}^2$ ) e tre scalari cubici ( $u_{ll}^3$ ,  $u_{ll} u_{ik}^2$ ,  $u_{ik} u_{il} u_{kl}$ ). Allora la forma generale di un'espressione scalare contenente termini di secondo e di terzo grado in  $u_{ik}$ , con coefficienti scalari (il corpo è isotropo!) è

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{ll} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3$$

(i coefficienti di  $u_{ik}^2$  e di  $u_{ll}^2$  sono stati espressi in funzione dei moduli di compressione e scorrimento;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono tre nuove costanti). Sostituendovi l'espres-

<sup>1)</sup> Sottolineiamo che  $\sigma_{ik}$  non rappresenta più la densità di flusso dell'impulso (il tensore degli sforzi). Nella teoria ordinaria una tale interpretazione deriva dall'integrazione della densità di forza di volume  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  nel volume del corpo. È allora essenziale che, integrando, non si facciano distinzioni tra le coordinate dei punti del corpo prima e dopo la deformazione, trascurando la differenza tra queste. Tuttavia, passando alle approssimazioni successive, non è più possibile tale omissione, poiché la superficie che delimita il dominio di integrazione non coincide più con la superficie reale del dominio considerato del corpo dopo la deformazione.

Si è mostrato nel § 2 che la simmetria di  $\sigma_{ik}$  è connessa alla conservazione del momento cinetico: questo risultato qui cade in quanto « la densità di momento cinetico » deve scriversi non più  $x_i u_k - x_k u_i$ , bensì

$$(x_i + u_i) \dot{u}_k - (x_k + u_k) \dot{u}_i.$$

sione (26,1) di  $u_{ik}$  e limitandosi ai termini del terzo ordine inclusi, si ha per l'energia elastica

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\ & + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left( \frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \times \\ & \times \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^3. \end{aligned}$$

## Capitolo IV

### DISLOCAZIONI<sup>1)</sup>

#### § 27. Deformazioni elastiche in presenza di dislocazioni

Le deformazioni elastiche in un cristallo possono essere prodotte non soltanto dall'azione di forze esterne, ma anche generate da difetti di struttura interna. Tali sono le *dislocazioni*, che influenzano necessariamente le proprietà elastiche dei cristalli. Lo studio delle proprietà delle dislocazioni dal punto di vista atomico, microscopico, non ricade nell'ambito di questo libro; qui ci limitiamo agli aspetti

macroscopici del fenomeno, che interessano la teoria dell'elasticità. Tuttavia, al fine di meglio evidenziare il senso fisico delle relazioni qui esposte, ricordiamo, ricorrendo a due esempi semplici, quali siano le caratteristiche dei difetti di dislocazione dal punto di vista della struttura del reticolo cristallino.

Immaginiamo che si sia inserito in un reticolo cristallino (rappresentato in sezione nella fig. 22) un semipiano «eccedente» (coincidente nella figura con il semipiano superiore  $y, z$ ).

La linea del bordo di questo piano (nel disegno, l'asse  $z$  perpendicolare al piano

si denomina in questo caso *dislocazione di bordo*. L'alterazione della struttura del reticolo è grande nelle immediate vicinanze della dislocazione, ma, già ad una distanza dell'ordine di qualche periodo, i piani cristallini hanno riacquistato la loro regolarità. Purtuttavia la deformazione non cessa di esistere lontano dalla dislocazione; essa si manifesta chiaramente quando si descriva nel piano  $x, y$  un contorno chiuso attorno all'origine, passante per i nodi del reticolo. Se si definisce a mezzo del vettore  $\mathbf{u}$  lo spostamento di ogni nodo relativamente alla posizione da esso occupata nel reticolo ideale, si trova che l'incremento totale di tale vettore non è nullo ma che invece è uguale ad un periodo lungo l'asse  $x$ .

<sup>1)</sup> Ha collaborato alla redazione di questo capitolo A. M. Kosevitch.

Un altro tipo di dislocazione può essere rappresentato come segue: si «tagli» il reticolo cristallino secondo un semipiano, quindi si ruotino, facendole spostare l'una verso l'altra, le due facce del taglio, parallelamente al bordo del taglio stesso (*dislocazione elicoidale*). Una tale dislocazione trasforma i piani cristallini in superfici elicoidali. Quando si fa un giro completo attorno alla linea di dislocazione (asse dell'elicoide), il vettore spostamento dei nodi si incrementa di un periodo, parallelamente a questo asse. La figura 23 illustra l'esempio in questione.

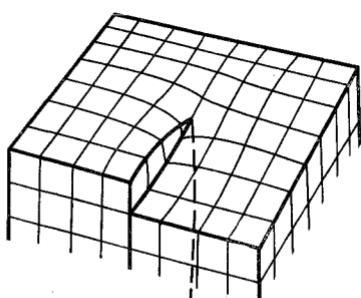


Fig. 23

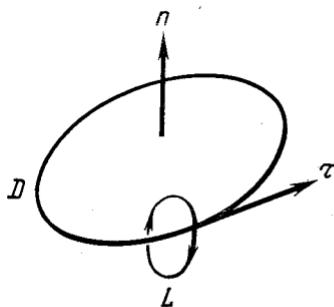


Fig. 24

Dal punto di vista macroscopico, la deformazione di dislocazione del cristallo, considerato in quanto mezzo continuo, gode, nel caso generale, della proprietà seguente: quando si descrive un contorno chiuso arbitrario  $L$  attorno alla linea di dislocazione  $D$ , il vettore di spostamento elastico  $u$  si incrementa di una quantità finita  $b$  uguale (in grandezza e direzione) ad uno dei periodi del reticolo cristallino; il vettore  $b$  è detto *vettore di Burgers* della dislocazione. Quanto detto è espresso dalla formula

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = -b_i, \quad (27,1)$$

dove il senso di percorrenza del contorno è assegnato dalla regola del cavatappi mediante il verso del vettore  $\tau$  tangente alla curva di dislocazione (fig. 24<sup>1)</sup>). La curva di dislocazione stessa è il luogo dei punti singolari del campo di deformazione.

È evidente che il vettore di Burgers  $b$  è costante lungo la curva di dislocazione e che questa curva non può interrompersi all'interno del cristallo, i suoi due estremi devono o emergere sulla superficie

<sup>1)</sup> Nei casi semplici delle dislocazioni di bordo ed elicoidale sopra esposti, le linee di dislocazione  $D$  sono rette lungo le quali si ha rispettivamente  $\tau \perp b$ ,  $\tau \parallel b$ . Osserviamo che nella fig. 22 le dislocazioni di bordo con  $b$  opposti si distinguono per il fatto che il semipiano «eccedente» si trova al di sopra o al di sotto del piano  $x$ ,  $z$  (si dice di tali dislocazioni che sono di segno opposto).

del cristallo, ovvero la curva (come avviene nei casi che si realizzano in natura) deve chiudersi su se stessa.

La condizione (27,1) significa, in altri termini, che in presenza di dislocazioni il vettore spostamento è una funzione multivoca delle coordinate, che subisce un incremento dato quando si descriva un contorno chiuso attorno alla linea di dislocazione. Ma, fisicamente, è manifesto che non può esistere alcuna multivocità: l'incremento  $\mathbf{b}$  significa semplicemente una traslazione supplementare dei punti del reticolo pari ad un suo periodo, il che non altera in nulla il suo stato.

Sarà comodo per il seguito introdurre la notazione

$$w_{ih} = \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \quad (27,2)$$

che permette di riscrivere la (27,1) nella forma

$$\oint_L w_{ih} dx_i = -b_h. \quad (27,3)$$

Il tensore (non simmetrico)  $w_{ih}$  è denominato *tensore di distorsione*. La sua parte simmetrica dà il tensore di deformazione

$$u_{ih} = \frac{1}{2} (w_{ih} + w_{hi}). \quad (27,4)$$

In virtù di quanto sopra detto i tensori  $w_{ih}$  e  $u_{ih}$  (e quindi il tensore degli sforzi  $\sigma_{ih}$ ) sono funzioni univoche delle coordinate, contrariamente ad  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

La condizione (27,3) può essere riformulata in forma differenziale. A tal fine si trasformi l'integrale sul contorno  $L$  in un integrale superficiale esteso ad una superficie arbitraria  $S_L$ , avente come bordo detto contorno<sup>1)</sup>:

$$\oint_L w_{mh} dx_m = \int_{S_L} e_{ilm} \frac{\partial w_{mh}}{\partial x_l} df_i.$$

A mezzo della funzione  $\delta$  bidimensionale, riscriviamo il vettore costante  $b_h$  sotto forma d'integrale esteso alla medesima superficie:

$$b_h = \int_{S_L} \tau_i b_h \delta(\xi) df_i, \quad (27,5)$$

<sup>1)</sup> Si realizza la trasformazione tramite il teorema di Stokes sostituendo  $dx_m$  con

$$dx_m \rightarrow df_i e_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

dove  $e_{ilm}$  è il tensore antisimmetrico unità.

$\xi$  è il raggio vettore bidimensionale contato a partire dall'asse di dislocazione nel piano perpendicolare a  $\tau$  nel punto dato. Poiché  $L$  è arbitrario, l'uguaglianza degli integrali comporta quella degli integrandi:

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\tau_i b_k \delta(\xi). \quad (27,6)$$

Questa è la forma differenziale cercata<sup>1)</sup>.

Il campo di spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  attorno alla dislocazione può essere scritto nella sua forma generale se è noto il tensore di Green  $G_{ik}(\mathbf{r})$  delle equazioni dell'equilibrio del mezzo anisotropo dato, cioè se è nota la funzione che determina la componente  $u_i$  creata nel mezzo illimitato da una forza unità concentrata nell'origine e diretta secondo l'asse degli  $x_k$  (cfr. § 8). Questo si può fare facilmente con il procedimento formale che ora illustreremo.

Invece di cercare soluzioni a piú valori delle equazioni dell'equilibrio, considereremo  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  come funzione univoca, convenendo che essa subisce una discontinuità data  $\mathbf{b}$  su una certa superficie arbitrariamente scelta  $S_D$ , che ha per bordo la curva (« maglia ») della dislocazione  $D$ . Allora, il tensore di deformazione, la cui espressione è data dalla (27,4), avrà una singolarità di tipo  $\delta$  sulla « superficie di discontinuità »:

$$u_{ik}^{(S)} = \frac{1}{2} (n_i b_k + n_k b_i) \delta(\zeta), \quad (27,7)$$

dove  $\zeta$  è la coordinata contata a partire dalla superficie  $S_D$ , secondo la normale  $\mathbf{n}$  (orientata rispetto a  $\tau$  come è indicato nella fig. 24).

Poiché in realtà non vi sono singolarità fisiche nello spazio attorno alla dislocazione, il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}$  deve, come già detto, essere una funzione univoca e ovunque continua. Ora, si ha un legame formale tra il tensore di deformazione (27,7) ed il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}^{(S)} = \lambda_{iklm} u_{lm}^{(S)}$ , che ha anche lui una singolarità sulla superficie  $S_D$ . Per eliminarlo, bisognerà introdurre forze di volume fittizie, distribuite su  $S_D$ , con una certa densità  $f_i^{(S)}$ . Le equazioni dell'equilibrio, in presenza di forze di volume, hanno la forma  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i^{(S)} = 0$  (cfr. la (2,7)). Allora, si dovrà porre

$$f_i^{(S)} = -\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = -\lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \quad (27,8)$$

In questo modo il problema della ricerca di una funzione multivoca  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  è ricondotto a quello della ricerca di una funzione univoca ma

<sup>1)</sup> Osserviamo, per evitare ogni possibilità di fraintendimento, che sulla linea di dislocazione stessa ( $\xi \rightarrow 0$ ), in quanto luogo di punti singolari, la rappresentazione di  $w_{ik}$  come derivate (27,2) perde di senso.

discontinua, in presenza di forze di volume definite dalle formule (27,7) e (27,8). Ci si può servire ora della formula

$$[u_i(\mathbf{r}) = \int G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_j^{\mathcal{E}'}(\mathbf{r}') dV'].$$

Sostituendo in questa la (27,8), integriamo per parti; ciò fatto, l'integrazione della funzione  $\delta$  è banale e si ottiene

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} b_m \int_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') df' \quad (27,9)$$

che fornisce la soluzione del problema<sup>1)</sup>.

La deformazione (27,9) assume una forma molto semplice quando si sia lontani dalla maglia della dislocazione chiusa. Se si suppone tale curva situata nelle vicinanze dell'origine, a grandi distanze  $r$  (rispetto alle sue dimensioni lineari), si ha

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} d_{lm} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k}, \quad (27,10)$$

ove

$$d_{ik} = S_i b_k, \quad S_i = \int_{S_D} n_i df = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint_D x_k dx_l, \quad (27,11)$$

dove  $e_{ikl}$  è il tensore antisimmetrico unitario. Il vettore assiale  $\mathbf{S}$  ha come componenti le aree delimitate dalle proiezioni della curva  $D$  sui piani normali agli assi delle coordinate corrispondenti; il tensore  $d_{ik}$  viene chiamato tensore del *momento di dislocazione*. Le componenti del tensore  $G_{ij}$  sono funzioni omogenee di primo grado in  $x, y, z$ , (cfr. pag. 42); allora dalla (27,10), per  $u_i$ :  $u_i \propto 1/r^2$ . Il corrispondente campo degli sforzi  $\sigma_{ik} \propto 1/r^3$ .

È ugualmente semplice ricavare l'andamento della dipendenza degli sforzi elasticci rispetto alla distanza attorno ad una dislocazione rettilinea. In coordinate cilindriche  $z, r, \varphi$  (asse  $z$  allineato con l'asse della dislocazione) la deformazione verrà a dipendere solo da  $r$  e  $\varphi$ . L'integrale (27,3) non deve, chiaramente, variare in una trasformazione omotetica arbitraria di ogni contorno nel piano  $x, y$ . Questo evidentemente è possibile solo se tutti i  $w_{ik} \propto 1/r$ . Poiché

<sup>1)</sup> Il tensore  $G_{ij}$  per un mezzo anisotropo è stato dedotto nell'articolo di I. M. Lifshits e L. N. Rosentsveig, citato a pag. 41. Questo tensore è in generale molto complicato. Nel caso di dislocazioni rettilinee, quando si tratti un problema piano di elasticità, può essere più vantaggioso risolvere direttamente le equazioni dell'equilibrio.

anche il tensore  $u_{ik}$  viene ad essere proporzionale a questa potenza di  $1/r$ , ne consegue che lo stesso si otterrà per il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik} \propto 1/r^1$ .

Finora abbiamo trattato soltanto delle dislocazioni, ma le formule dedotte mantengono la propria validità anche per deformazioni provenienti da altri difetti della struttura cristallina. Le dislocazioni sono difetti di struttura lineari, ma si trovano anche difetti tali che l'alterazione della struttura si osserva all'intorno di una superficie<sup>2)</sup>. Dal punto di vista macroscopico, un difetto di questa specie può essere descritto come una superficie di discontinuità su cui il vettore spostamento  $u$  fa un salto (ma, in virtù delle condizioni d'equilibrio, gli sforzi  $\sigma_{ik}$  restano continui). Se il salto  $b$  è costante su tutta la superficie una tale rottura di regolarità non differisce, dal punto di vista delle deformazioni prodotte, da una dislocazione (situata lungo il suo bordo). Soltanto si ha che il vettore  $b$  non risulta uguale ad un periodo cristallino. D'altra parte, la superficie  $S_D$ , precedentemente introdotta, non è più arbitraria ma è assegnata dalla superficie di discontinuità fisica. Una certa energia supplementare è connessa a una tale superficie di discontinuità e può essere descritta introducendo la tensione superficiale corrispondente.

### P R O B L E M I

1. Scrivere, in funzione del vettore spostamento<sup>3)</sup>, le equazioni differenziali di equilibrio per una deformazione da dislocazione in un mezzo isotropo.

*Soluzione.* In termini di tensore degli sforzi o del tensore di deformazione, le equazioni di equilibrio hanno la forma usuale  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$ , ovvero, sostituendo a  $\sigma_{ik}$  la sua espressione (5,11),

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Osserviamo l'analogia tra il campo di deformazione elastica attorno alla linea di dislocazione ed il campo magnetico di correnti lineari continue; il ruolo dell'intensità di corrente è qui rilevato dal vettore di Burgers (deve essere costante lungo la linea di dislocazione nello stesso modo in cui deve esserlo l'intensità di corrente). Tali analogie emergeranno chiaramente nel seguito della trattazione. Tuttavia, senza dire della natura completamente diversa dei due fenomeni fisici, l'analogia è meramente formale e sprovvista di qualsivoglia senso, proprio in vista della differenza nel carattere tensoriale delle grandezze corrispondenti.

<sup>2)</sup> Un esempio noto di tale genere di difetti è dato da uno strato sottile emitropo nel cristallo.

<sup>3)</sup> Il senso fisico del problema, per quanto concerne l'isotropia del mezzo, è puramente convenzionale poiché le dislocazioni reali sono proprie solo dei cristalli, cioè dei mezzi anisotropi. Purtuttavia, questi problemi presentano un certo interesse, servendo ad illustrare la teoria.

Passando al vettore  $\mathbf{u}$ , bisogna tenere conto della condizione differenziale (276). Moltiplicando la (27,6) per  $e_{ikh}$  e contraendo su  $i$  e  $k$ , si ha<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} - \frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n} = -[\tau b]_n \delta(\xi). \quad (2)$$

Riscrivendo la (1) nella forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w_{ih}}{\partial x_h} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_{hi}}{\partial x_h} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = 0$$

e sostituendo la (2) in questa uguaglianza, si trova

$$\frac{\partial w_{hi}}{\partial x_h} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = [\tau b]_i \delta(\xi).$$

Passando ora, secondo la (27,2), ad  $\mathbf{u}$ , abbiamo l'equazione che si cercava per la funzione multivoca  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , nella forma

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = [\tau b] \delta(\xi). \quad (3)$$

2. Determinare la deformazione attorno ad una dislocazione rettilinea elicoidale in un mezzo isotropo.

*Soluzione.* Scegliamo le coordinate cilindriche  $z, r, \varphi$  con l'asse  $z$  allineato con la linea della dislocazione; vettore di Burgers:  $b_x = b_y = 0, b_z = b$ . È evidente, per ragioni di simmetria, che lo spostamento  $\mathbf{u}$  è parallelo all'asse  $z$  e non dipende dalla coordinata  $z$ . L'equazione di equilibrio (3) del problema 1 si riduce a  $\Delta u_z = 0$ . La soluzione che soddisfa la condizione (27,1) è<sup>2)</sup>

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \varphi.$$

I tensori  $u_{ik}$  e  $\sigma_{ik}$  hanno soltanto le componenti

$$u_{z\varphi} = \frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{z\varphi} = -\frac{\mu b}{2\pi r}$$

non nulle, quindi la deformazione è un puro scorrimento.

L'energia libera di dislocazione (per unità di lunghezza di dislocazione) è data dall'integrale

$$F = \frac{1}{2} \int 2u_{z\varphi}\sigma_{z\varphi} dV = \frac{\mu b^2}{4\pi} \int \frac{dr}{r}$$

che diverge logaritmicamente nei due estremi. Si prenderà per estremo inferiore una quantità dell'ordine delle distanze atomiche ( $\sim b$ ), per cui la deformazione è grande e la teoria macroscopica diviene inapplicabile. L'estremo superiore è determinato dalle dimensioni dell'ordine di grandezza della lunghezza  $L$  della dislocazione. Allora

$$F = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \frac{L}{b}.$$

Per quanto riguarda l'energia di deformazione nel « cuore » della dislocazione, nelle vicinanze del suo asse (nelle regioni in cui l'area della sezione è  $\sim b^2$ ),

1) Ricordiamo che

$$e_{ilm}e_{ikh} = \delta_{lk}\delta_{mn} - \delta_{ln}\delta_{mk}.$$

2) In tutti i problemi con dislocazioni rettilinee  $\tau$  è diretto nel verso delle  $z$  negative.

la si può prendere  $\sim \mu b^2$ . Per  $\ln(L/b) \gg 1$ , questa energia è piccola rispetto all'energia del campo della deformazione elastica<sup>1)</sup>.

3. Determinare gli sforzi interni in un mezzo anisotropo attorno ad una dislocazione elicoidale perpendicolare al piano di simmetria del cristallo.

*Soluzione.* Scegliamo il sistema di coordinate  $x, y, z$ , in modo tale che l'asse  $z$  sia l'asse della dislocazione (nuovamente  $b_z = b$ ). Il vettore  $\mathbf{u}$  è ridotto nuovamente ad una sola componente non nulla  $u_z = u(x, y)$ . Il piano  $x, y$  è piano di simmetria, quindi tutte le componenti di  $\lambda_{iklm}$  contenenti  $z$  un numero dispari di volte sono nulle. Dunque per  $\sigma_{ik}$  si hanno solo due componenti non nulle:

$$\sigma_{xz} = \lambda_{xzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{xzyz} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\sigma_{yz} = \lambda_{yzxz} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{yzyz} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Introduciamo il vettore  $\sigma$  ed il tensore  $\lambda_{\alpha\beta}$  bidimensionali:  $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha z}$ ,  $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha z\beta z}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Allora

$$\sigma_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

e l'equazione di equilibrio si scrive  $\operatorname{div} \sigma = 0$ . La soluzione cercata di questa equazione è quella che soddisfa la (27,1):  $\oint \nabla u d\ell = b$ . Posto in questa forma, il problema coincide con quello della ricerca dell'induzione e del campo magnetico (rappresentati qui da  $\sigma$  e  $\nabla u$ ) in un mezzo anisotropo (di permeabilità magnetica  $\lambda_{\alpha\beta}$ ) attorno ad un filo percorso da una corrente di intensità  $I = cb/4\pi$ . Utilizzando la soluzione di questo problema, nota dall'elettrodinamica, si ha (cfr. VIII, § 29, problema 5)

$$\sigma_{\alpha z} = -\frac{b}{2\pi} \frac{\lambda_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma z} x_\gamma}{V |\lambda| \lambda_{\alpha'\beta'}^{-1} x_{\alpha'} x_{\beta'}},$$

dove  $|\lambda|$  è il determinante del tensore  $\lambda_{\alpha\beta}$ .

4. Determinare la deformazione attorno ad una dislocazione di bordo rettilinea in un mezzo isotropo.

*Soluzione.* Sia  $z$  l'asse scelto allineato con la linea della dislocazione, e il vettore di Burgers:  $b_x = b$ ,  $b_y = b_z = 0$ . Dalla simmetria del problema discende che il vettore di deformazione è tutto nel piano  $x, y$  e non dipende da  $z$ , talché il problema è piano. Nel seguito del problema, tutti i vettori sono nel piano  $x, y$ , e le operazioni vettoriali si effettuano in questo piano.

Ricerchiamo la soluzione dell'equazione

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -b \mathbf{j} \delta(\mathbf{r})$$

(vedi problema 4;  $\mathbf{j}$  è il versore dell'asse  $y$ ), nella forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{w}$ , dove  $\mathbf{u}^{(0)}$  è il vettore di componenti

$$u_x^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \varphi, \quad u_y^{(0)} = \frac{b}{2\pi} \ln r$$

1) Queste stime hanno validità generale e si estendono al caso di dislocazioni qualunque (non solo elicoidali). Bisogna osservare che in generale i valori di  $\ln(L/b)$  non sono così grandi e che quindi l'energia del «cuore» della dislocazione costituisce una parte notevole dell'energia totale di dislocazione.

(parte immaginaria e reale di  $(b/2\pi) \ln(x+iy)$ );  $r, \varphi$  sono le coordinate polari nel piano  $x, y$ . Questo vettore soddisfa la (27,1) ed il problema è ricondotto alla ricerca della funzione univoca  $\mathbf{w}$ . Poiché, come è facile verificare

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{(0)} = b \mathbf{j} \delta(\mathbf{r}),$$

$\mathbf{w}$  soddisfa l'equazione

$$\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} = -2b \mathbf{j} \delta(\mathbf{r}).$$

È l'equazione di equilibrio sotto l'azione di forze concentrate lungo l'asse  $z$  con densità di volume  $\frac{Eb\mathbf{j}}{2(1+\sigma)} \delta(\mathbf{r})$  (cfr. l'equazione (4) nel problema del § 8).

Con il tensore di Green per un mezzo illimitato, trovato in questo problema,  $\mathbf{w}$  si ottiene dall'integrale

$$\mathbf{w} = \frac{b}{8\pi(1-\sigma)} 2 \int_0^\infty \left[ \frac{(3-4\sigma)\mathbf{j}}{R} + \frac{\mathbf{ry}}{R^3} \right] dz', \quad R = \sqrt{r^2+z'^2}.$$

Si trova infine

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2+y^2} \right\},$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right\}.$$

Il tensore degli sforzi che si deduce di qui ha componenti cartesiane

$$\sigma_{xx} = -bD \frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bD \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bD \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

e componenti polari

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -bD \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = bD \frac{\cos \varphi}{r},$$

con  $D = \mu/2\pi(1-\sigma)$ .

5. Un numero infinito di dislocazioni identiche, di bordo, rettilinee, parallele in un mezzo isotropo, sono contenute in un piano perpendicolare ai loro vettori di Burgers, alla distanza  $h$  l'una dell'altra. Trovare gli sforzi di scorimento creati da un tale «muro di dislocazioni», a grandi distanze (rispetto ad  $h$ ).

*Soluzione.* Supponiamo le dislocazioni parallele all'asse  $z$  e contenute nel piano  $y, z$ . Secondo quanto trovato nel problema 4, lo sforzo totale creato da tutte le dislocazioni nel punto  $x, y$  è dato dalla somma

$$\sigma_{xy}(x, y) = bDx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - (y-nh)^2}{[x^2 + (y-nh)^2]^2}.$$

Riscriviamola nella forma

$$\sigma_{xy} = -bD \frac{\alpha}{h} \left[ J(\alpha, \beta) + \alpha \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right],$$

dove

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - nh)^2}, \quad \alpha = \frac{x}{h}, \quad \beta = \frac{y}{h}.$$

Usando la formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i h x} dx$$

si trova

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} + 2 \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} e^{2\pi i h \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i h \xi}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{h=1}^{\infty} e^{-2\pi h \alpha} \cos 2\pi h \beta. \end{aligned}$$

Per  $\alpha = x/h \gg 1$ , si può arrestare la somma al primo termine, e si ha corrispondentemente

$$\sigma_{xy} = 4\pi^2 D \frac{bx}{h^2} e^{-2\pi x/h} \cos \left( 2\pi \frac{y}{h} \right).$$

Si vede così che gli sforzi decrescono esponenzialmente quando ci si allontani dal muro.

### § 28. Azione del campo di sforzi sulla dislocazione

Consideriamo una maglia di dislocazione  $D$  nel campo di sforzi elasticici  $\sigma_{ik}^{(e)}$  creati da carichi esterni dati, e calcoliamo la forza a cui questa è sottoposta in tale campo.

In virtù delle regole generali, bisogna a tal fine trovare il lavoro  $\delta R$  effettuato dagli sforzi interni in uno spostamento infinitesimo della curva  $D$ . Se  $\delta u_{ih}$  è la variazione del tensore di deformazione dovuta a questo spostamento, si ha, tenuto presente la (3,1)<sup>1)</sup>,

$$\delta R = - \int \sigma_{ik}^{(e)} \delta u_{ik} dV.$$

La distribuzione degli sforzi  $\sigma_{ik}^{(e)}$  è supposta indipendente dalla posizione della dislocazione, quindi il segno di variazione  $\delta$  può essere portato fuori dell'integrale. Tenuto poi conto della simmetria del tensore  $\sigma_{ik}^{(e)}$  e dell'equazione di equilibrio  $\frac{\partial \sigma_{ik}^{(e)}}{\partial x_k} = 0$ , scriveremo

$$\begin{aligned} \delta R &= - \delta \int \sigma_{ik}^{(e)} u_{ik} dV = - \delta \int \sigma_{ik}^{(e)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dV = \\ &= - \delta \int \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ik}^{(e)} u_k) dV. \end{aligned} \quad (28,1)$$

<sup>1)</sup> Per evitare ogni malinteso, sottolineiamo che  $\delta u_{ik}$  è in questa formula (secondo il significato di questa grandezza nella (3,1)) la variazione (geometrica) totale della deformazione a seguito di uno spostamento infinitesimo della dislocazione; essa è costituita, nel caso presente, dalla parte elastica e dalla parte plastica (vedi paragrafo successivo).

Considereremo, secondo quanto esposto al paragrafo precedente,  $\mathbf{u}$  come una funzione univoca, discontinua su una certa superficie  $S_D$  che si appoggia alla linea  $D$ . Allora, si può trasformare l'integrale di volume (28,1) in integrale su una superficie chiusa passante per il bordo superiore ed inferiore del taglio di  $S_D$ , raccordati da una superficie laterale infinitamente stretta (un tubo), inviluppante la linea  $D$ . I valori di  $\sigma_{ik}^{(e)}$ , che sono continui, sono identici sui due bordi, quelli di  $\mathbf{u}$  differiscono della grandezza data  $\mathbf{b}$ . Si ha dunque<sup>1)</sup>

$$\delta R = -b_k \delta \int_{S_D} \sigma_{ik}^{(e)} df_i. \quad (28,2)$$

Sia  $\delta \mathbf{r}$  lo spostamento di ogni elemento della linea di dislocazione  $d\mathbf{l}$ . Questo spostamento provoca la variazione dell'area di  $S_D$ ; si ha  $\delta \mathbf{f} = [\delta \mathbf{r} d\mathbf{l}]$ , cioè

$$\delta f_i = e_{imn} \delta x_m dl_n = e_{imn} \delta x_m \tau_n dl.$$

Allora, il lavoro (28,2) può essere scritto nella forma di un integrale di linea esteso alla curva della dislocazione:

$$\delta R = - \oint_D b_k e_{imn} \sigma_{ki}^{(e)} \delta x_m \tau_n dl,$$

dove  $\tau$  è il vettore tangente a  $D$ .

Il coefficiente di  $\delta x_m$  nell'espressione integranda, cambiato di segno, è la forza  $f_m$  agente sull'unità di lunghezza della linea di dislocazione. Cioè si ha

$$f_i = e_{ikh} \tau_h \sigma_{lm}^{(e)} b_m \quad (28,3)$$

(*M. Peach e J. Koehler*, 1950). Notiamo che la forza  $\mathbf{f}$  è normale a  $\tau$ , cioè alla linea di dislocazione, come anche al vettore  $\sigma_{ik}^{(e)} b_k$ .

Il piano definito dal vettore  $\tau$  e dal vettore  $\mathbf{b}$  in ogni punto della dislocazione è detto *piano di scorrimento* dell'elemento di dislocazione corrispondente (per tutti gli elementi, questi piani sono ovviamente tangenti alla superficie di scorrimento di tutta la dislocazione, che è una superficie cilindrica, le cui generatrici sono parallele al vettore di Burgers della dislocazione  $\mathbf{b}$ ). La particolarità fisica del piano di scorrimento è che la dislocazione non può spostarsi facilmente, anche di poco, eccetto che in questo piano<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> L'integrale sul tubo laterale di raggio  $\rho$  si annulla per  $\rho \rightarrow 0$ , poiché gli  $u_k$  vanno all'infinito più lentamente di  $1/\rho$ .

<sup>2)</sup> Questa circostanza risulta, come è noto, dall'immagine microscopica del difetto di dislocazione. Così, per spostare nel suo piano di scorrimento ( $x, z$ ) la dislocazione di bordo rappresentata nella fig. 22, sono sufficienti degli spostamenti relativamente piccoli degli atomi, a seguito dei quali diventano «eccezionali» dei semipiani cristallini via via più distanti dal piano  $y, z$  (ma, come prima, paralleli a questo piano).

Invece, per gli spostamenti di dislocazione nelle altre direzioni, questi sono possibili solo a seguito di processi di diffusione. Così, la dislocazione nella

In relazione a ciò diviene interessante determinare la componente della forza (28,3) su questo piano.

Sia  $\kappa$  la normale alla linea di dislocazione nel piano di scorrimento. La componente cercata (denotata con  $f_{\perp}$ ) è allora  $f_{\perp} = \kappa_i f_i = e_{ikl} \kappa_i b_m \tau_k \sigma_{lm}^{(e)}$ , cioè

$$f_{\perp} = v_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m, \quad (28,4)$$

$\mathbf{v} = [\kappa \tau]$  è la normale al piano di scorrimento. Poiché  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{v}$  sono ortogonali, si vede che (si prendano due assi coordinati allineati con questi due vettori) la forza  $f_{\perp}$  è determinata in tutto e per tutto da una sola delle componenti di  $\sigma_{lm}^{(e)}$ .

La forza totale agente su tutta la maglia di dislocazione è

$$F_i = e_{ikl} b_m \oint_D \sigma_{lm}^{(e)} dx_k \quad (28,5)$$

ed è diversa da zero solo in un campo di sforzi non uniforme (se  $\sigma_{lm}^{(e)} = \text{cost}$ , allora l'integrale si riduce a  $\oint_D dx_k = 0$ ). Se il campo degli sforzi varia di poco su una distanza dell'ordine delle dimensioni di  $D$ , abbiamo

$$F_i = e_{ikl} b_m \frac{\partial \sigma_{lm}^{(e)}}{\partial x_p} \oint_D x_p dx_k$$

(si è supposto  $D$  nell'intorno dell'origine delle coordinate). Questa forza può essere espressa per il tramite del momento di dislocazione  $d_{kl}$  (27,11):

$$F_i = d_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}^{(e)}}{\partial x_i}. \quad (28,6)$$

### PROBLEMI

1. Trovare la forza di interazione di due dislocazioni elicoidali parallele in un mezzo isotropo.

*Soluzione.* La forza agente sull'unità di lunghezza di una dislocazione nel campo degli sforzi creato dalla seconda dislocazione si determina con la formula (28,4) e ricorrendo ai risultati del problema 2, § 27. È radiale e vale

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r}.$$

Dislocazioni di uguale segno si respingono ( $b_1 b_2 > 0$ ), di segno opposto si attirano ( $b_1 b_2 < 0$ ).

2. Una dislocazione elicoidale rettilinea è situata parallelamente alla superficie libera piana di un mezzo isotropo. Trovare la forza agente sulla dislocazione.

fig. 22 può spostarsi nel piano  $y, z$  soltanto se gli atomi del semipiano « eccezionale » lo abbandonano per diffusione. Ma un tale processo entra in gioco solo a temperature sufficientemente grandi.

*Soluzione.* Il piano  $y, z$  è preso sulla superficie del corpo, la dislocazione parallela all'asse  $z$  e di coordinate  $x = x_0, y = 0$ .

Il campo degli sforzi, che lascia libera la superficie del mezzo, è descritto dalla somma del campo di dislocazione e dal suo simmetrico rispetto al piano  $y, z$  come se fossero situati in un mezzo illimitato:

$$\sigma_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2} \right],$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\mu b}{2\pi} \left[ \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y^2} \right].$$

Un tale campo agisce sulla dislocazione considerata con una forza uguale all'attrazione della sua immagine speculare, cioè la dislocazione è attratta verso la superficie del mezzo con la forza

$$f = \frac{\mu b^2}{4\pi x_0}.$$

3. Trovare la forza d'interazione di due dislocazioni di bordo parallele in un mezzo isotropo, disposte in piani di scorrimento paralleli.

*Soluzione.* Supponiamo i piani di scorrimento paralleli al piano  $x, z$ , l'asse  $z$  parallelo alle linee di dislocazione; così come nel problema 4, § 27, si pone  $\tau_z = -1$ ,  $b_x = b$ . Allora, la forza agente sull'unità di lunghezza della dislocazione nel campo degli sforzi elasticici  $\sigma_{ih}$  ha per componenti

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

Nel presente caso i  $\sigma_{ih}$  sono determinati tramite le espressioni trovate nel problema 4, § 27. Se una delle due dislocazioni coincide con l'asse  $z$ , essa agisce sull'altra passante per il punto  $x, y$ , nel piano  $x, y$ , con una forza di componenti, in coordinate polari

$$f_r = \frac{b_1 b_2 D}{r}, \quad f_\phi = \frac{b_1 b_2 D}{r} \sin 2\varphi, \quad D = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}.$$

La proiezione della forza sul piano di scorrimento è

$$f_x = b_1 b_2 D \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{r}.$$

Si annulla per  $\varphi = \pi/2$  e  $\varphi = \pi/4$ . La prima posizione corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile per  $b_1 b_2 > 0$ , la seconda lo è per  $b_1 b_2 < 0$ .

### § 29. Distribuzione continua di dislocazioni

Se in un cristallo sono presenti in gran numero dislocazioni situate a distanze relativamente piccole le une dalle altre (ma grandi rispetto alla costante del reticolo), allora diventa necessario considerare le loro proprietà da un punto di vista statistico. In altri termini, si considerano nel cristallo elementi di volume del cristallo «fisicamente infinitesimi», attraversati da un grande numero di linee di dislocazione.

Si formula l'equazione che esprime la proprietà fondamentale delle deformazioni di dislocazione, generalizzando l'equazione (27,6). Introduciamo il tensore  $p_{ik}$  (*tensore di densità di dislocazione*)

in modo tale che il suo integrale su una superficie, che ha per bordo un contorno arbitrario  $L$ , sia uguale alla somma  $\mathbf{b}$  dei vettori di Burgers di tutte le linee di dislocazione comprese entro questo contorno:

$$\int_{S_L} \rho_{ik} df_i = b_k. \quad (29,1)$$

Le funzioni continue  $\rho_{ik}$  descrivono la distribuzione delle dislocazioni nel cristallo. Questo tensore sostituisce l'espressione nel secondo membro della (27,6):

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\rho_{ik}. \quad (29,2)$$

Come si vede da questa equazione,  $\rho_{ik}$  deve soddisfare la condizione

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad (29,3)$$

(nel caso di una sola dislocazione questa equazione esprime semplicemente la costanza del vettore di Burgers lungo una linea di dislocazione).

Con questo tipo di approccio, la grandezza primitiva che descrive la deformazione, e che determina il tensore di deformazione tramite le (27,4), viene ad essere il tensore  $w_{ik}$ . Per quanto riguarda lo spostamento  $\mathbf{u}$ , connesso a  $w_{ik}$  per il tramite della (27,2), non può più essere introdotto (come è evidente dal fatto che con una simile definizione il primo membro della (29,2) si annulla identicamente in tutto il volume del cristallo).

Sin qui abbiamo considerato le dislocazioni come fisse; consideriamo ora il problema della formulazione del sistema di equazioni che permetta, in linea di principio, la determinazione delle deformazioni elastiche e degli sforzi in un mezzo in cui le dislocazioni si muovano secondo una legge assegnata (*E. Kröner, G. Rieder, 1956*)<sup>1</sup>.

L'equazione (29,2) non dipende dallo stato di quiete o di moto delle dislocazioni; il tensore  $w_{ik}$ , come precedentemente, resta la grandezza che determina la deformazione elastica; la sua parte simmetrica è il tensore di deformazione elastica, connesso al tensore degli sforzi secondo la legge di Hooke.

Malgrado ciò, questa equazione non è sufficiente, da sola, alla formulazione completa del problema. Il sistema completo delle equazioni deve anche determinare la velocità  $\mathbf{v}$  dello spostamento dei punti del mezzo.

<sup>1)</sup> Non trattiamo qui la determinazione del moto stesso delle dislocazioni a partire dalle forze applicate. La soluzione di questo problema esige uno studio dettagliato del meccanismo microscopico del movimento delle dislocazioni e del loro rallentamento ad opera di difetti diversi, che deve essere fatto tenendo in conto i dati effettivi della struttura dei cristalli reali.

Ma allora, occorre notare che il movimento delle dislocazioni avviene, simultaneamente alla variazione della deformazione elastica, con variazioni della forma del cristallo non legate all'apparizione degli sforzi, cioè con la *deformazione plastica*. È noto che il movimento delle dislocazioni rappresenta proprio il meccanismo della deformazione plastica. (Il legame tra moto delle dislocazioni e deformazione plastica è mostrato chiaramente nella fig. 25; la dislocazione di bordo si sposta da sinistra verso destra; la parte superiore, al di sopra del piano di scorrimento, subisce una traslazione uguale ad un periodo del reticolo; poiché il reticolo riprende da ultimo la sua regolarità, il cristallo non è soggetto a sforzi.)

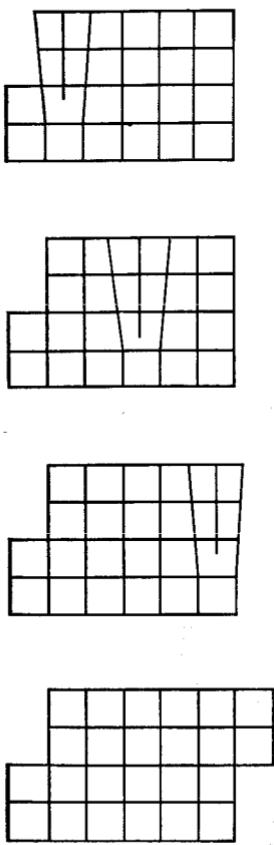


Fig. 25

Sia  $\mathbf{u}$  il vettore spostamento geometrico dei punti del mezzo contatto, per esempio, a partire dalla loro posizione prima del processo della deformazione; la sua derivata rispetto al tempo è  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ . Se, a partire da  $\mathbf{u}$ , si forma il tensore di « distorsione totale »  $W_{ik} = \partial u_k / \partial x_i$ , la sua « parte plastica »  $w_{ik}^{(pl)}$  è ottenuta sottraendo a  $W_{ik}$  il tensore di « distorsione elastica » che coincide con il  $w_{ik}$  che figura nella (29,2). Introduciamo la notazione

$$-j_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^{(pl)}}{\partial t}; \quad (29,4)$$

la parte simmetrica di  $j_{ik}$  definisce la velocità di variazione del tensore di deformazione plastica: la variazione di  $u_{ik}^{(pl)}$  nel tempo infinitesimo  $\delta t$  è

$$\delta u_{ik}^{(pl)} = -\frac{1}{2}(j_{ik} + j_{ki})\delta t. \quad (29,5)$$

Sottolineiamo allora che se la deformazione plastica si opera senza lacerazioni del corpo, la traccia di  $j_{ik}$  è nulla. Infatti una deforma-

zione plastica non conduce né ad una trazione né ad una compressione del corpo (che sono sempre legate all'insorgere degli sforzi interni), cioè  $u_{hk}^{(pl)} = 0$ , e dunque  $j_{hk} = -\partial u_{hk}^{(pl)}/\partial t = 0$ .

Sostituendo nella definizione (29,4)  $w_{ih}^{(pl)} = W_{ik} - w_{ik}$ , riscriviamo

$$\frac{\partial w_{ih}}{\partial t} = \frac{\partial v_h}{\partial x_i} + j_{ih} \quad (29,6)$$

che collega tra di loro le velocità di variazione delle deformazioni elastiche e plastiche. I  $j_{ih}$  devono essere considerati come grandezze date, che debbono soddisfare a condizioni che assicurino la compatibilità delle equazioni (29,6) e (29,2). Queste condizioni si ottengono derivando la (29,2) rispetto al tempo e sostituendovi la (29,6); esse si esprimono con l'equazione

$$\frac{\partial \rho_{ih}}{\partial t} + e_{ilm} \frac{\partial j_{mh}}{\partial x_l} = 0. \quad (29,7)$$

Il sistema completo è dato dalle equazioni (29,2) e (29,6) e dalle equazioni dinamiche

$$\dot{\rho v_i} = \frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial x_k}, \quad (29,8)$$

dove  $\sigma_{ih} = \lambda_{iklm} u_{lm} = \lambda_{iklm} w_{lm}$ . I tensori  $\rho_{ih}$  e  $j_{ih}$  che appaiono in queste equazioni sono funzioni assegnate delle coordinate (e del tempo), caratterizzanti la distribuzione ed il movimento delle dislocazioni. Queste funzioni debbono soddisfare alle condizioni di compatibilità delle equazioni (29,2) tra di loro e con l'equazione (29,6), esplicitate dalle (29,3) e (29,7).

La condizione (29,7) può essere considerata come l'espressione differenziale della « legge di conservazione del vettore di Burgers » nel mezzo. In effetti integrando i due membri dell'equazione (29,7) su di una superficie che si appoggia su un certo contorno chiuso  $L$ , introducendo secondo la (29,1) il vettore di Burgers totale  $\mathbf{b}$  delle dislocazioni contornate da  $L$ , e utilizzando il teorema di Stokes si ottiene

$$\frac{db_h}{dt} = - \oint_L j_{ih} dx_i. \quad (29,9)$$

Risulta di qui che l'integrale del secondo membro rappresenta la quantità del vettore di Burgers « che passa » nell'unità di tempo attraverso  $L$ , cioè a dire trasportata dalle dislocazioni che tagliano  $L$ . Allora è naturale chiamare  $j_{ih}$  tensore della *densità di flusso delle dislocazioni*.

Evidentemente, nel caso di una sola curva di dislocazione il tensore  $j_{ih}$  ha la forma

$$j_{ih} = e_{ilm} \rho_{lh} V_m = e_{ilm} \tau_l V_m b_h \delta(\xi) \quad (29,10)$$

( $\rho_{ih}$  è ottenuto dalla (27,6)),  $V$  è la velocità della linea di dislocazione nel punto dato. Il vettore di flusso attraverso l'elemento  $dl$  del contorno  $L$  ( $j_{ih} dl_i$ ) è proporzionale a  $dl [\tau V] = V [dl \tau]$ , cioè alla proiezione della velocità  $V$  sulla normale comune a  $dl$  a  $\tau$ , come ci si doveva aspettare in base a considerazioni geometriche: solo questa proiezione della velocità conduce all'intersezione dell'elemento  $dl$  con la dislocazione.

Osserviamo che la traccia del tensore (29,10) è proporzionale alla proiezione della velocità della dislocazione sulla normale al suo piano di scorrimento. Abbiamo indicato precedentemente come la condizione  $j_{ii} = 0$  assicuri l'assenza della variazione non elastica della densità del mezzo. Si vede che per una dislocazione isolata questa condizione significa movimento nel piano di scorrimento, in conformità con quanto detto sopra sulla natura fisica del movimento delle dislocazioni (vedi nota, pag. 162).

Soffermiamoci infine sul caso in cui le maglie di dislocazione nel cristallo siano distribuite in modo tale che il vettore di Burgers totale (indichiamolo con  $B$ ) sia nullo<sup>1)</sup>. Questa condizione significa

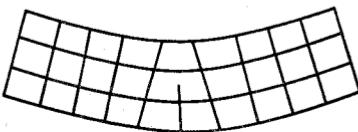


Fig. 26

che l'integrazione su una sezione trasversale arbitraria del corpo dato è

$$\int \rho_{ih} df_i = 0. \quad (29,11)$$

Allora, in questo caso, la densità di dislocazione può scriversi

$$\rho_{ih} = e_{ilm} \frac{\partial P_{mh}}{\partial x_i} \quad (29,12)$$

(F. Kroupa, 1962); allora l'integrale (29,11) si trasforma in integrale su un contorno esterno al corpo e si annulla. Osserviamo anche che l'espressione (29,12) soddisfa automaticamente la condizione (29,3).

È facile vedere che il tensore  $P_{ih}$  così definito è la densità del momento di dislocazione nel cristallo deformato (e pertanto è naturale chiamarlo « polarizzazione di deformazione »). In effetti, il

<sup>1)</sup> La presenza della dislocazione risulta da una certa flessione del cristallo che si è rappresentata schematicamente nella fig. 26, esagerando le cose. La condizione  $B = 0$  significa l'assenza di flessione macroscopica del cristallo nel suo insieme.

momento di dislocazione totale del cristallo  $D_{ik}$  è, per definizione,

$$D_{ik} = \sum S_i b_k = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum_b b_k \oint_D x_l dx_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l \rho_{mk} dV,$$

dove la somma è fatta su tutte le maglie di dislocazione e l'integrale è calcolato su tutto il volume del cristallo. Sostituendo qui la (29,12), si ha

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qk}}{\partial x_p} dV = \frac{1}{2} \int x_m \left( \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_m} \right) dV$$

e dopo l'integrazione per parti:

$$D_{ik} = \int P_{ik} dV. \quad (29,13)$$

Per quanto riguarda la densità di flusso di dislocazioni, questa si esprime a mezzo del tensore  $P_{ik}$ :

$$j_{ik} = - \frac{\partial P_{ik}}{\partial t}. \quad (29,14)$$

Si verifica ciò facilmente, calcolando per esempio l'integrale  $\int j_{ik} dV$  in una parte qualunque del volume del corpo mediante l'espressione (29,10) come somma su tutte le maglie di dislocazione contenute in questo volume. Notiamo che le (29,14) e (29,12) verificano automaticamente la condizione (29,7).

Confrontando la (29,14) con la (29,4), si constata che  $\delta w_{ik}^{(pl)} = \delta P_{ik}$ . Se si assume che la deformazione plastica è assente nello stato con  $P_{ik} = 0$ , si avrà  $w_{ik}^{(pl)} = P_{ik}$ <sup>1)</sup>. Allora

$$w_{ik} = W_{ik} - w_{ik}^{(pl)} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \quad (29,15)$$

$u_k$  è nuovamente il vettore spostamento geometrico totale, contatto a partire dalla posizione corrispondente allo stato non deformato. L'equazione (29,6) è allora soddisfatta identicamente e l'equazione dinamica (29,8) prende la forma

$$\ddot{\rho u}_i - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = - \lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \quad (29,16)$$

In tal modo la determinazione della deformazione elastica creata da dislocazioni mobili con  $\mathbf{B} = 0$  è ricondotta ad un problema della teoria dell'elasticità ordinaria con forze di volume distribuite nel cristallo con la densità  $-\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}$  (*A. M. Kossevič*, 1963).

<sup>1)</sup> È inteso che il processo di deformazione tutto intero si opera con  $\mathbf{B} = 0$ . Questa circostanza va sottolineata, perché esiste una differenza di principio tra  $P_{ik}$  e  $w_{ik}^{(pl)}$ : mentre il primo è una funzione dello stato del corpo, il secondo non lo è, ma invece dipende dal processo che ha portato il corpo nello stato presente.

### § 30. Distribuzione di dislocazioni in interazione

Consideriamo un insieme di dislocazioni rettilinee identiche, situate parallelamente le une alle altre in uno stesso piano di scorrimento, e deduciamo le equazioni che definiscono la loro distribuzione dell'equilibrio. L'asse  $z$  è parallelo alle dislocazioni, il piano di scorrimento è preso come piano  $x, z$ .

Per fissare le idee supponiamo che i vettori di Burgers delle dislocazioni siano diretti lungo l'asse  $x$ . Allora, la forza che agisce in questo piano di scorrimento sull'unità di lunghezza di dislocazione è uguale a  $b\sigma_{xy}$ , dove  $\sigma_{xy}$  è lo sforzo nel punto in cui si trova la dislocazione.

Gli sforzi creati da una dislocazione rettilinea (e agente su un'altra dislocazione) decrescono come l'inverso della distanza da questa dislocazione. Quindi, lo sforzo creato nel punto  $x$  da una dislocazione che si trovi in  $x'$  è della forma  $bD/(x - x')$ , dove  $D$  è una costante d'ordine di grandezza pari ai moduli elastici del cristallo. Si può dimostrare che  $D > 0$ , cioè che due dislocazioni identiche in uno stesso piano di scorrimento si respingono<sup>1)</sup>.

Indichiamo con  $\rho(x)$  la densità lineare delle dislocazioni distribuite sul segmento  $(a_1, a_2)$  dell'asse  $x$ ;  $\rho(x)dx$  è la somma dei vettori di Burgers delle dislocazioni passanti per i punti dell'intervallo  $dx$ . Allora, lo sforzo totale creato nel punto dell'asse  $x$  da parte di tutte le dislocazioni si scrive nella forma

$$\sigma_{xy}(x) = -D \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (30,1)$$

Per i punti interni al segmento  $(a_1, a_2)$ , questo integrale deve essere identificato col suo valore principale in modo tale da eliminare l'azione, priva di senso fisico, della dislocazione su sé stessa.

Se dunque si ha nel cristallo un campo di sforzi piano (nel piano  $x, y$ )  $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$  creato da carichi esterni assegnati, ogni dislocazione sarà sottoposta all'azione della forza  $b(\sigma_{xy} + p(x))$ , dove, per brevità, si è posto  $p(x) = \sigma_{xy}^{(e)}(x, 0)$ . La condizione di equilibrio è data dall'annullamento di questa forza:  $\sigma_{xy} + p = 0$ , cioè

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \quad (30,2)$$

dove, con notazione usuale, si è sbarrato l'integrale per designarne la parte principale. Si ha così un'equazione integrale che porta alla determinazione della distribuzione dell'equilibrio  $\rho(x)$ . Questa

<sup>1)</sup> Nel caso di un mezzo isotropo, questo è già stato mostrato nel problema 3 del § 28.

equazione è del tipo delle equazioni integrali singolari con nucleo di Cauchy.

La risoluzione di una siffatta equazione è ricondotta ad un problema della teoria di funzioni di variabile complessa, così formulato.

Indichiamo con  $\Omega(z)$  la funzione definita in tutto il piano della variabile complessa  $z$  (tagliato secondo il segmento  $(a_1, a_2)$ ) con l'integrale

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (30,3)$$

e indichiamo con  $\Omega^+(x)$  e  $\Omega^-(x)$  i valori limite di  $\Omega(z)$  sul margine superiore e inferiore del taglio. Questi sono uguali a integrali di questo tipo calcolati sul segmento  $(a_1, a_2)$ , col punto  $z = x$  contornato rispettivamente dal basso o dall'alto su una semicirconferenza di raggio infinitamente piccolo, cioè

$$\Omega^\pm(x) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x} \pm i\pi\rho(x). \quad (30,4)$$

Se  $\rho(\xi)$  verifica la (30,2) il valore principale dell'integrale è uguale a  $\omega(x)$ , e si ha

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \quad (30,5)$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\pi\rho(x). \quad (30,6)$$

In tal modo, risolvere l'equazione (30,2) significa cercare una funzione analitica  $\Omega(z)$  dotata della proprietà (30,5), quindi  $\rho(x)$  è assegnata dalla (30,6). Le condizioni fisiche del problema considerato esigono che si abbia  $\Omega(\infty) = 0$ ; questo discende dal fatto che, lontano dall'insieme delle dislocazioni ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), gli sforzi  $\sigma_{xy}$  debbono annullarsi (dalla definizione (30,3) al di fuori del segmento  $(a_1, a_2)$ :  $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$ ).

Consideriamo il caso in cui gli sforzi esterni sono assenti ( $p(x) \equiv 0$ ), essendo le dislocazioni confinate dalla presenza di ostacoli qualsivoglia (diffetti del reticolato) agli estremi del segmento  $(a_1, a_2)$ . Per  $\omega(x) = 0$ , la (30,5) dà  $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$ , cioè a dire la funzione  $\Omega(z)$  deve cambiare di segno quando si aggiri ciascuno dei due estremi  $a_1, a_2$ . A questa condizione soddisfa ogni funzione avente la seguente espressione:

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}, \quad (30,7)$$

dove  $P(z)$  è un polinomio. La condizione  $\Omega(\infty) = 0$  determina, a meno di una costante moltiplicativa, il polinomio  $P(z) = 1$ ,

talché

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}}. \quad (30,8)$$

In virtù della (30,6) la funzione  $\rho(x)$  avrà una forma dello stesso tipo; la costante che appare nella sua espressione resta determinata dalla condizione

$$\int_{a_1}^{a_2} \rho(\xi) d\xi = B \quad (30,9)$$

( $B$  è la somma dei vettori di Burgers di tutte le dislocazioni). Si ha in definitiva

$$\rho(x) = \frac{B}{\pi \sqrt{(x-a_2)(x-a_1)}}. \quad (30,10)$$

Questa formula mostra come le dislocazioni si accumulino nei pressi degli ostacoli (cioè sulla frontiera del segmento), con una densità inversamente proporzionale alla radice della distanza da questi ultimi. A questa stessa legge obbedisce l'andamento degli sforzi, allorché ci si avvicini, provenendo dall'esterno, ad uno dei due punti  $a_1$ ,  $a_2$ ; così, per esempio per  $x > a_2$ , si ha

$$\sigma_{xy} \cong \frac{BD}{\sqrt{(x-a_2)(x-a_1)}}.$$

In altri termini, la concentrazione delle dislocazioni nei pressi della frontiera dà luogo alla stessa concentrazione di sforzi, oltre la frontiera stessa.

Supponiamo ora che, nelle stesse condizioni (ostacoli sulla frontiera del segmento dato), si abbia anche un campo di sforzi esterno  $p(x)$ . Indichiamo con  $\Omega_0(z)$  una funzione della forma della (30,7) e riscriviamo quindi la (30,5) (dividendo per  $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$ ) nella forma

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

Confrontandola con la (30,6), se ne deduce

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{i\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \frac{d\xi}{\xi-z} + i\pi P(z), \quad (30,11)$$

dove  $P(z)$  è un polinomio. Si ottiene la soluzione che soddisfa la condizione  $\Omega(\infty) = 0$ , se per  $\Omega_0(z)$  si assume l'espressione data dalla (30,8) e per  $P(z)$  si pone  $P(z) = C$  ( $C$  è una costante). Allora,

per il tramite della (30,6), arriviamo all'espressione della funzione  $\rho(x)$

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}} \times \\ \times \int_{a_1}^{a_2} \omega(\xi) \sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)} \frac{d\xi}{\xi-x} + \frac{C}{\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}}. \quad (30,12)$$

La costante  $C$  è determinata dalla condizione (30,9). Si constata anche che  $\rho(x)$  cresce quando ci si avvicini alla frontiera,  $x \rightarrow a_1, 2$ , con la legge  $(a_2-x)^{-1/2}$ , e che al di là degli ostacoli si ha la stessa concentrazione degli sforzi.

Se l'ostacolo esiste da una sola parte (per esempio nel punto  $a_2$ ), la soluzione cercata deve soddisfare alla condizione imposta al tensore degli sforzi, e cioè che questo rimanga finito per tutti i valori di  $x < a_2$ , compreso il punto  $a_1$ ; allora la posizione di questo punto non è nota a priori, ma resta determinata dalla risoluzione del problema. In termini di  $\Omega(z)$ , questo significa che  $\Omega(a_1)$  deve restare finita. Si ottiene una funzione siffatta (che inoltre soddisfa la  $\Omega(\infty) = 0$ ) dalla formula (30,11), scegliendo però per  $\Omega_0(z)$  la funzione

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z-a_1}{a_2-z}}$$

che è ancora del tipo (30,7), e ponendo nella (30,11)  $P(z) = 0$ . Si ha così

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2-\xi}{\xi-a_1}} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi-x}. \quad (30,13)$$

Quando  $x \rightarrow a_1$ ,  $\rho(x)$  tende a zero secondo la legge  $\sqrt{x-a_1}$ . Secondo questa stessa legge tende a zero, per valori di  $x < a_1$ , il tensore degli sforzi totale  $\sigma_{xy}(x) + p(x)$ .

Infine, supponiamo che agli estremi del segmento non ci siano ostacoli, e le dislocazioni vengano ad essere confinate solo in virtù della presenza degli sforzi esterni  $p(x)$ . Si ottiene la funzione  $\Omega(z)$  corrispondente, ponendo nella (30,11)

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

Tuttavia, la condizione  $\Omega(\infty) = 0$  impone un'ulteriore restrizione: passando al limite per  $z \rightarrow \infty$  nella (30,11), si trova

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}} = 0. \quad (30,14)$$

La funzione  $\rho(x)$  è così determinata dalla formula

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{(a_2-x)(x-a_1)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}} \frac{d\xi}{\xi-x}, \quad (30,15)$$

dove le coordinate  $a_1, a_2$  degli estremi del segmento sono determinate dalle condizioni (30,9) e (30,14).

### P R O B L E M A

Trovare la distribuzione delle dislocazioni in un campo uniforme degli sforzi ( $p(x) = p_0$ ) su un tronco con ostacoli su uno o entrambi gli estremi.

*Soluzione.* Nel caso della presenza di un solo ostacolo nell'estremo ( $a_2$ ) il calcolo dell'integrale (30,13) fornisce

$$\rho(x) = \frac{p_0}{\pi D} \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}}.$$

La condizione (30,9) determina la lunghezza del tronco occupato dalle dislocazioni:  $a_2 - a_1 = 2BD/p_0$ . Dall'altra parte dell'ostacolo, sempre nel suo intorno, la concentrazione degli sforzi soddisfa la legge

$$\sigma_{xy} \cong p_0 \sqrt{\frac{a_2-a_1}{x-a_2}}.$$

Nel caso di un tronco (di lunghezza  $2L$ ) delimitato da due ostacoli, assunto come origine delle coordinate  $x$  il punto centrale del tronco, si ha a seguito della (30,12)

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{L^2-x^2}} \left( \frac{p_0}{D} x + B \right).$$

### § 31. Equilibrio di una fessura in un mezzo elastico

Il problema dell'equilibrio di una fessura presenta un carattere eminentemente specifico tra i problemi della teoria dell'elasticità. Nei termini di questa teoria, una fessura è una cavità che esiste in un mezzo elastico in presenza di sforzi interni e che si « richiude », quando siano tolti i carichi. La forma e le dimensioni della fessura dipendono essenzialmente dagli sforzi che sono operanti. Allora, la peculiarità matematica del problema consiste nel fatto che si assegnano condizioni ai limiti su una superficie a priori non nota e che verrà determinata dalla risoluzione del problema <sup>1)</sup>.

Consideriamo nel mezzo isotropo una fessura infinitamente lunga ed omogenea in una direzione (secondo l'asse delle  $z$ ), posta in un campo di sforzi piano  $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$ ; in altri termini, si ha a che fare con un problema di elasticità piano. Supporremo qui che gli sforzi siano simmetrici rispetto al centro della sezione della fessura, dunque, che il profilo della sezione sia simmetrico (fig. 27). Sia  $2L$

<sup>1)</sup> La teoria quantitativa delle fessure qui esposta è dovuta a G. I. Barenblatt (1959).

la sua lunghezza,  $h(x)$  la sua larghezza, variabile; poiché la fessura è simmetrica,  $h$  è una funzione pari:  $h(x) = h(-x)$ .

Supponiamo che la fessura sia sottile, cioè sia  $h(x) \ll L$ , pertanto si possono ricondurre le condizioni al limite sulla sua superficie al

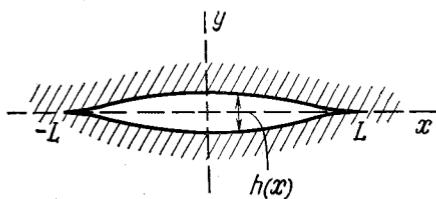


Fig. 27

segmento corrispondente dell'asse  $x$ . In questo senso, la fessura è assimilata ad una linea di discontinuità (nel piano  $x, y$ ) sulla quale la componente normale dello spostamento subisce un salto  $u_y = \pm h/2$ .

Sostituendo  $h(x)$  con un'altra funzione incognita  $\rho(x)$ , definita tramite la formula

$$h(x) = \int_{-\infty}^L \rho(x) dx, \quad \rho(-x) = -\rho(x). \quad (31,1)$$

Da un punto di vista esclusivamente formale, è comodo interpretare la funzione  $\rho(x)$  come la densità di dislocazioni rettilinee (secondo l'asse  $z$ ), distribuite con continuità lungo l'asse  $x$  e con vettori di Burgers paralleli all'asse  $y$ <sup>1)</sup>. Nel § 27 è stato spiegato come una linea di dislocazione possa essere considerata come il bordo di una superficie di discontinuità in cui il vettore  $\mathbf{u}$ , aggirando il bordo, subisce un salto pari a  $\mathbf{b}$ . Nella rappresentazione (31,1) il salto  $h$  dello spostamento normale nel punto  $x$  è considerato come la somma dei vettori di Burgers di tutte le dislocazioni passanti alla destra di questo punto (la  $\rho(-x) = -\rho(x)$  indica che le dislocazioni hanno segni opposti dall'una e dall'altra parte di  $x = 0$ ).

Una siffatta rappresentazione permette di scrivere subito l'espressione degli sforzi normali ( $\sigma_{yy}$ ) sull'asse delle  $x$ . Questi risultano composti dagli sforzi  $\sigma_{yy}^{(e)}(x, 0)$ , indotti da carichi esterni, che brevemente indichiamo con  $p(x)$ , e dagli sforzi  $\sigma_{yy}^{(f)}(x)$  creati dalla deformazione prodotta dalla fessura. Considerando questi ultimi

<sup>1)</sup> È proprio in relazione a ciò che abbiamo collegato la teoria della fessura al capitolo delle dislocazioni, malgrado che dal punto di vista fisico si tratti di fenomeni del tutto differenti.

come creati da una distribuzione continua di dislocazioni sul segmento  $(-L, L)$ , si ottiene (come nella (30,1))

$$\sigma_{yy}^{(f)}(x) = -D \int_{-L}^L \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x} \quad (31,2)$$

(per i punti entro il segmento  $(-L, L)$  l'integrale deve essere identificato con la sua parte principale). Per un mezzo isotropo

$$D = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)} = \frac{E}{4\pi(1-\sigma^2)} \quad (31,3)$$

(vedi problema 3, § 28). Per quanto riguarda gli sforzi  $\sigma_{xy}$  creati da tali dislocazioni in un mezzo isotropo, essi si annullano sull'asse  $x$ .

La condizione al limite sulla superficie libera della fessura, ricondotta (come sopra detto) al segmento corrispondente dell'asse  $x$ , comporta l'annullamento degli sforzi normali  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{(f)} + p(x)$ . Questa condizione va però precisata in vista della seguente circostanza.

Supponiamo (questa ipotesi verrà poi confermata dal risultato che se ne deduce) che nel punto di raccordo i due margini della fessura si rinsaldino « tangenzialmente », talché in questa regione le due superfici si sono ravvicinate, portandosi a distanze molto piccole. In queste condizioni si deve tenere conto degli effetti dovuti all'azione delle forze di attrazione molecolare tra le superfici, forze il cui raggio d'azione si estende, come si sa, su distanze dell'ordine  $r_0$ , grandi rispetto alle distanze atomiche. Queste forze acquistano un ruolo preminente in una banda sottile, nei pressi del combaciamento, dove  $h \ll r_0$  (indichiamo l'ordine di grandezza della lunghezza di tale regione con  $d$ ; questa sarà valutata più avanti).

Sia  $G$  la forza di coesione molecolare riportata all'unità d'area della fessura; essa dipende dalla distanza  $h$  tra le superfici. Tenendo conto di tali forze, la condizione al limite deve scriversi

$$\sigma_{yy}^{(f)} + p(x) - G = 0. \quad (31,4)$$

È naturale supporre che la forma della fessura nelle vicinanze della connessura sia determinata dal carattere delle forze di coesione e non dipenda dai carichi esterni applicati al corpo. Allora, nel determinare la forma della parte principale della fessura a partire dalle forze esterne  $p(x)$ , la quantità  $G$  diviene una funzione  $G(x)$  data, indipendente da  $p(x)$  (nell'intervallo  $d$ , laddove merita tenerne conto) <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Nella teoria macroscopica la funzione  $G(x)$  sarà rappresentata da una funzione crescente monotonicamente (quando  $L-x$  decresce) fino ad un certo valore massimo raggiunto all'estremo della fessura.

Sostituendo nella (31,4) l'espressione (31,2) di  $\sigma_{yy}^{(0)}$ , si ottiene l'equazione integrale per  $\rho(x)$

$$\int_{-L}^L \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{D} p(x) - \frac{1}{D} G(x) \equiv \omega(x). \quad (31,5)$$

Poiché gli estremi della fessura sono supposti non fissi, gli sforzi in questi punti devono restare finiti. Questo significa che, risolvendo l'equazione integrale (31,5), ci troviamo ora nell'ultimo dei casi esaminati nel § 30, la cui risposta è data dalla (30,15). In virtù della scelta dell'origine delle coordinate (nel mezzo del segmento  $(-L, L)$ ), questa formula si riscrive

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{L^2 - x^2} \int_{-L}^L \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x}. \quad (31,6)$$

**La condizione (30,14) fornisce nel presente caso**

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} - \int_0^L \frac{G(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = 0 \quad (31,7)$$

(utilizzando la simmetria del problema, siamo passati dall'integrale esteso a  $(-L, L)$  all'integrale sul segmento  $(0, L)$ ). Poiché  $G(x)$  differisce da zero solo nella regione  $L - x \sim d$ , nel secondo integrale si può porre  $L^2 - x^2 \cong 2L(L - x)$ , e quindi riscrivere

$$\int_0^L \frac{p(x) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} = \frac{M}{\sqrt{2L}}, \quad (31,8)$$

dove con  $M$  abbiamo indicato la costante (che dipende dal materiale del mezzo):

$$M = \int_0^d \frac{G(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi}}. \quad (31,9)$$

Questa costante può esprimersi a mezzo delle caratteristiche macroscopiche usuali del corpo: moduli di elasticità e tensione superficiale  $\alpha$ ; come vedremo, si ha

$$M = \sqrt{\frac{\pi \alpha E}{1 - \sigma^2}}. \quad (31,10)$$

La (31,8) è l'equazione che determina la lunghezza della fessura  $2L$  in funzione della distribuzione degli sforzi  $p(x)$ . Così, per una fessura tesa da forze  $f$  applicate nel mezzo dei suoi lati ( $p(x) = f\delta(x)$ ), si ha

$$2L = \frac{f^2}{M^2} = \frac{f^2(1 - \sigma^2)}{\pi \alpha E}. \quad (31,11)$$

Si deve notare che non ogni distribuzione  $p(x)$  comporta l'equilibrio stabile di fessura. Dalla (31,8), nel caso di sforzi di trazione uniforme ( $p(x) = \text{cost} \equiv p_0$ ), si ottiene

$$2L = \frac{4M^2}{\pi^2 p_0^2} = \frac{4\alpha E}{\pi(1-\sigma^2) p_0^2}. \quad (31,12)$$

Il carattere di questa dipendenza ( $L$  decresce quando  $p_0$  aumenta) mostra l'instabilità dello stato. Il valore di  $L$  definito dalla (31,12) corrisponde ad un equilibrio instabile e assegna la lunghezza « critica » della fessura: fessure più lunghe crescono spontaneamente, fessure più corte « si rinsaldano » (questo risultato è stato ottenuto per la prima volta da *A. Griffith*, 1920).

Passiamo ora allo studio del profilo di una fessura. Per  $L - x \leq d$  il ruolo dominante è giocato nell'integrale (31,6) dalla regione dei valori  $L - \xi \sim d$ . Allora l'integrale può essere sostituito dal suo valore limite corrispondente al caso  $x \rightarrow L$ , e si ottiene  $\rho = \text{cost} \sqrt{L - x}$ , da cui segue <sup>1)</sup>

$$h(x) = \text{cost} (L - x)^{3/2} \quad (L - x \sim d). \quad (31,13)$$

Si vede che nell'intervallo  $d$ , alla connessione, le due labbra della fessura si richiudono tangenzialmente, come preannunciato. Il valore del coefficiente nella (31,13) dipende dalle proprietà delle forze di coesione e non può essere espresso per il tramite dei parametri macroscopici usuali <sup>2)</sup>.

Quando ci si allontana dalla connessione, cioè per  $d \ll L - x \ll L$ , la regione  $L - \xi \sim d$ , con  $\omega(\xi) \cong -G(\xi)/D$ , riprende il suo ruolo dominante nell'integrale (31,6). Ma oltre alle sostituzioni  $L^2 - x^2 \cong 2L(L - x)$ ,  $L^2 - \xi^2 \cong 2L(L - \xi)$ , si può ancora sostituire  $\xi - x$  con  $L - x$ . Si ha così

$$\rho = \frac{M}{\pi^2 D \sqrt{L - x}},$$

dove  $M$  è la stessa costante che appare nelle (31,9), (31,10). Di qui consegue:

$$h(x) = \frac{2M}{\pi^2 D} \sqrt{L - x} \quad (d \ll L - x \ll L). \quad (31,14)$$

Così dunque la parte terminale del profilo è indipendente dalle forze applicate (e quindi dalla lunghezza della fessura) in tutta la regione

<sup>1)</sup> Per realizzare il passaggio al limite bisogna preliminarmente decomporre l'integrale nella (31,6) nella somma di due integrali di numeratori  $\omega(\xi) - \omega(\bar{L})$  e  $\omega(L)$ ; questo secondo integrale non dà contributo nel passaggio al limite.

<sup>2)</sup> Una stima del coefficiente nella (31,13) conduce al valore  $\text{cost} \sim \sqrt{a/d}$ , dove  $a$  rappresenta le dimensioni atomiche (si è fatto uso delle stime  $\alpha \sim aE$ ,  $M \sim E \sqrt{a}$ ). La stima della lunghezza  $d$  discende dalla condizione  $h(d) \sim r_0$ , da cui  $d \sim r_0^2/a$ , cioè  $d \gg r_0$ . Bisogna però dire che le disuguaglianze effettivamente necessarie per le stime hanno un margine debole, talché non bisogna prendere troppo alla lettera la forma a « becco » della parte terminale.

$L - x \ll L$ : per  $L - x \gg d$  il profilo è determinato dall'espressione (31,14) e per  $L - x \sim d$  termina nella forma di punta affilata dell'equazione (31,13) (fig. 28). Altrove, la forma della fessura dipende dalle forze applicate.

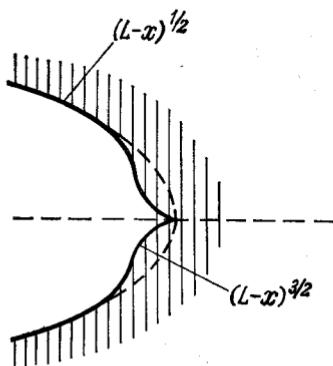


Fig. 28

Così, trascurando i dettagli le cui dimensioni sono dell'ordine del raggio d'azione delle forze molecolari, la fessura ha un profilo regolare che termina con archi di parabola (31,14), e questo profilo è completamente determinato a seguito delle forze applicate per mezzo dei parametri macroscopici usuali. Ma i « becchi » terminali ( $\sim d$ ) che appaiono sono di importanza fondamentale, perché è grazie alla loro presenza che gli sforzi sono finiti agli estremi della fessura.

Gli sforzi creati dalla fessura nel prolungamento dell'asse  $x$  sono determinati dalla (31,2). A distanze  $x = L$ , per cui  $d \ll x - L \ll \ll L^1$ ,

$$\sigma_{yy} \cong \rho_{yy}^{(t)} \cong \frac{M}{\pi \sqrt{x-L}}. \quad (31,15)$$

La crescita degli sforzi, quando ci si approssima alla connessura, continua secondo questa legge fino a distanze  $x - L \sim d$ , quindi  $\sigma_{yy}$  si annulla in  $x = L$ .

Resta da dedurre la formula (31,10) indicata sopra, che collega la costante  $M$  alle grandezze macroscopiche usuali. Scriveremo a tal fine la condizione di minimo dell'energia libera totale, annullando la sua variazione in funzione di  $L$ .

Da una parte, quando la fessura si allunga di  $\delta L$ , la sua energia superficiale, sulle due superfici libere, si incrementa di  $\delta F_{\text{sup}} =$

<sup>1)</sup> L'integrale si calcola con facilità direttamente, ma non è neppure necessario fare il conto se si tiene presente il legame tra le funzioni  $\rho(x)$  per  $x < L$  e  $\sigma_{yy}^{(t)}$  per  $x > L$ , che emerge subito dalle deduzioni fatte nel § 30.

$= 2\alpha\delta L$ . Nello stesso tempo, l'« allargamento » della connessura fa decrescere l'energia elastica  $F_{el}$  di

$$\frac{1}{2} \int \sigma_{yy}(x) \eta(x) dx,$$

dove  $\eta(x)$  è la differenza tra l'apertura delle labbra prima e dopo il loro spostamento. Il profilo dell'estremo della fessura non dipende dalla sua lunghezza, pertanto si ha  $\eta(x) = h(x - \delta L) - h(x)$ . Gli sforzi  $\sigma_{yy} = 0$  per  $x < L$ ,  $h(x) = 0$  per  $x > L$ . Si ottiene dunque

$$\delta F_{el} = -\frac{1}{2} \int_L^{L+\delta L} \sigma_{yy}(x) h(x - \delta L) dx.$$

Sostituendovi le (31,14) e (31,15), si ha

$$\begin{aligned} \delta F_{el} &= -\frac{M^2}{\pi^3 D} \int_L^{L+\delta L} \sqrt{\frac{L+\delta L-x}{x-L}} dx = \\ &= -\frac{M^2}{\pi^3 D} \int_0^{\delta L} \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{\delta L-y}} = -\frac{M^2}{2\pi^2 D} \delta L. \end{aligned}$$

Infine, da  $\delta F_{sup} + \delta F_{el} = 0$  si deduce la relazione  $M^2 = 4\pi^2\alpha D$  e quindi la (31,10)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Osserviamo che la teoria esposta sotto questa forma compresa la relazione (31,10) si applica in realtà ai corpi idealmente fragili, per i quali l'elasticità lineare sussiste fino alla rottura (come il vetro, il quarzo fuso). Nei corpi dotati di plasticità, al contrario, la formazione di una fessura può essere accompagnata da una deformazione plastica alle estremità.

## CONDUZIONE TERMICA E VISCOSITÀ NEI CORPI SOLIDI

### *§ 32. Equazione del calore nei solidi*

Il riscaldamento non uniforme in un mezzo solido non comporta la convezione in tale mezzo, come avviene ordinariamente nei liquidi. Pertanto, la trasmissione di calore si opera esclusivamente per conduzione, e i processi di conduzione nei solidi sono descritti da equazioni relativamente più semplici che nei liquidi, dove la convezione complica le cose.

L'equazione del calore in un mezzo solido può essere dedotta direttamente dalla legge della conservazione dell'energia, espressa nella forma di «equazione di continuità» per la quantità di calore. La quantità di calore assorbita nell'unità di tempo, per unità di volume del corpo, è uguale a  $T \frac{\partial S}{\partial t}$ , dove  $S$  è l'entropia dell'unità di volume. Questa grandezza deve essere uguale a  $-\operatorname{div} \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}$  essendo la densità del flusso di calore. Questo flusso può praticamente sempre scriversi nella forma  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , cioè a dire è proporzionale al gradiente della temperatura ( $\kappa$  è il coefficiente di termoconduzione). In questo modo

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla T) \quad (32.1)$$

In virtù della formula (6,4), l'entropia può scriversi nella forma

$$S = S_0(T) + K \alpha u_{tt},$$

$\alpha$  essendo il coefficiente di dilatazione termica, e  $S_0$  l'entropia del corpo nello stato non deformato. Supporremo, come avviene ordinariamente, che le differenze di temperatura nel corpo siano sufficientemente piccole per poter considerare come costanti grandi quali  $\kappa$ ,  $\alpha$ , ecc. Allora, dopo aver sostituito per  $S$  l'espressione sopra scritta, l'equazione (32,1) assume la forma

$$T \frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha K T \frac{\partial u_{tt}}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

È noto dalla termodinamica che  $C_p - C_v = K \alpha^2 T$ , quindi  $\alpha K T = (C_p - C_v)/\alpha$ . Si può scrivere la derivata di  $S_0$  nella forma

$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$ , dove  $\frac{\partial S_0}{\partial T}$  è presa per  $u_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , cioè a volume costante, e vale quindi  $\frac{C_v}{T}$ .

Si trova finalmente l'equazione del calore nella forma

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \kappa \Delta T. \quad (32,2)$$

Per avere il sistema di equazioni completo, bisogna associare a questa equazione l'equazione che definisce la deformazione del corpo riscaldato non uniformemente. Questa è l'equazione di equilibrio (7,8)

$$2(1-\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1-2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3} \nabla T. \quad (32,3)$$

L'equazione (32,3) permette, in linea di principio, di determinare la deformazione del corpo per una distribuzione arbitrariamente assegnata della temperatura. Sostituendo l'espressione così ottenuta di  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  nella (32,2), si ottiene l'equazione che determina la distribuzione della temperatura, dove solo  $T(x, y, z, t)$  è la funzione incognita. Consideriamo, per esempio, la propagazione del calore in un mezzo solido illimitato dove la distribuzione della temperatura è sottoposta ad una sola condizione: all'infinito essa deve tendere ad un valore costante  $T_0$  e non c'è deformazione. Allora, in queste circostanze, l'equazione (32,3) fornisce la seguente relazione tra  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  e  $T$  (cfr. problema 8, § 7):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \alpha (T - T_0).$$

Sostituendo questa espressione nella (32,2), si ottiene

$$\frac{(1+\sigma) C_p + 2(1-2\sigma) C_v}{3(1-\sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad (32,4)$$

che è l'equazione semplice del calore.

Un'equazione di questo tipo descrive anche la distribuzione della temperatura lungo una sbarra sottile rettilinea, purché almeno uno dei suoi estremi non sia fissato. La distribuzione della temperatura in ogni sezione trasversale può essere considerata costante, quindi  $T$  è funzione della sola  $x$  lungo la sbarra (e del tempo). La dilatazione termica di una tale sbarra ha per effetto solo la variazione della lunghezza, non altera la forma rettilinea e non dà luogo a sforzi interni. Così, è chiaro che la derivata  $\frac{\partial S}{\partial t}$  nell'equazione generale (32,1) verrà presa a pressione costante e poiché  $(\frac{\partial S}{\partial T})_p = \frac{C_p}{T}$  la distribuzione della temperatura sarà descritta dall'equazione del calore unidimensionale

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Peraltro, bisogna notare che, con una precisione sufficiente in pratica, la distribuzione della temperatura in un corpo solido può sempre essere determinata da un'equazione semplice. In effetti, il secondo termine del primo membro della (32,2) è una correzione di ordine  $(C_p - C_v)/C_v$  rispetto al primo termine. Ora, la differenza  $C_p - C_v$  ordinariamente è infinitesima, nei corpi solidi, e se ne prescinde; l'equazione del calore può sempre scriversi nella forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (32,5)$$

dove  $\chi$  è il coefficiente della temperatura, determinato dal rapporto  $\chi = \frac{\kappa}{C}$  del coefficiente  $\kappa$  ad un certo calore specifico medio  $C$  dell'unità di volume.

### § 33. Conduzione del calore nei cristalli

In un corpo anisotropo, la direzione del flusso di calore  $\mathbf{q}$  non deve, in generale, coincidere con quella del gradiente della temperatura. Così, al posto della formula  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  tra  $\mathbf{q}$  e il gradiente della temperatura si avrà in un cristallo la dipendenza più generale

$$q_i = -\kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (33,4)$$

$\kappa_{ik}$  è detto tensore di termoconduzione del cristallo. In virtù di questa dipendenza, l'equazione del calore (32,5) avrà anch'essa una forma più generale:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (33,2)$$

Mostriamo che il tensore  $\kappa_{ik}$  è simmetrico:

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}. \quad (33,3)$$

Questo discende dal principio di simmetria dei coefficienti cinematici (cfr. V, § 120).

La velocità di crescita dell'entropia totale del corpo grazie ai processi irreversibili di termoconduzione è

$$S_{\text{tot}} = - \int \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} dV = - \int \text{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dV + \int \mathbf{q} \nabla \frac{1}{T} dV.$$

Trasformato in integrale superficiale, il primo integrale si annulla. Si ha così

$$S_{\text{tot}} = \int \mathbf{q} \nabla \frac{1}{T} dV = - \int \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T^2} dV$$

$$S_{\text{tot}} = - \int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \quad (33,4)$$

In accordo con la definizione generale dei coefficienti cinetici <sup>1)</sup>, si può concludere, in virtù della (33,4), che nel caso presente tali sono i coefficienti  $T^2 \kappa_{ih}$  nelle relazioni

$$q_i = -T^2 \kappa_{ih} \left( \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_h} \right).$$

Di qui, la simmetria dei coefficienti cinetici giustifica la relazione (33,3).

La forma quadratica

$$-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa_{ih} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_h}$$

deve essere definita positiva, perché tale deve essere la derivata (33,4) dell'entropia rispetto al tempo. La condizione che una forma quadratica sia definita positiva è, come è noto, che i valori principali della matrice dei suoi coefficienti siano positivi. Pertanto, tutti i valori principali del tensore  $\kappa_{ih}$  sono sempre positivi, come risulta anche da semplici considerazioni sulla direzione del flusso del calore.

Il numero delle diverse componenti indipendenti di  $\kappa_{ih}$  dipende dalla simmetria del cristallo. Poiché  $\kappa_{ih}$  è simmetrico, è evidente che questo numero è lo stesso di quello degli  $\alpha_{ih}$  (tensore di dilatazione termica; cfr. § 10).

### § 34. Viscosità dei corpi solidi

Studiando il movimento nei corpi elastici, abbiamo sin qui supposto che il processo di deformazione evolva reversibilmente. Ma in realtà il processo è termodinamicamente reversibile solo se la sua velocità è infinitamente piccola, in modo tale che istante per istante si stabilisca l'equilibrio termodinamico. Ora, un movimento reale si svolge con una velocità finita, quindi il corpo non si trova ad ogni istante in equilibrio, ed è sede di processi che tendono a ripristinare tale stato di equilibrio. La presenza di questi processi produce l'irreversibilità del moto, espressa, come si sa, da dissipazione di energia meccanica <sup>2)</sup>, che, alla lunga, si trasforma in calore.

La dissipazione dell'energia è dovuta a due tipi di processi. Primo, la temperatura varia da un punto all'altro del corpo, pertanto in questo si ha un processo irreversibile di termoconduzione. Secondo, se nel corpo si effettua un movimento qualsivoglia, questo provoca processi irreversibili dovuti al fatto che la velocità del movimento è finita; questi processi di dissipazione dell'energia pos-

<sup>1)</sup> Utilizziamo qui la definizione nella forma data nel VI, § 58.

<sup>2)</sup> Si intende qui per energia meccanica la somma dell'energia cinetica del movimento macroscopico nel corpo elastico e della sua energia potenziale (elastica) dovuta alla presenza della deformazione.

sono chiamarsi, come nel caso dei liquidi, processi di attrito interno o di viscosità.

Nella maggior parte dei casi la velocità del movimento macroscopico nei corpi è tanto piccola che la dissipazione dell'energia è insignificante. I processi « quasi reversibili » di questo tipo possono essere descritti tramite la funzione di dissipazione (cfr. V, § 126).

Precisiamo. Se si ha un sistema meccanico in cui il movimento è accompagnato da dissipazione d'energia, il movimento può essere descritto dalle equazioni di moto ordinarie, in cui è sufficiente aggiungere alle forze che agiscono sul sistema le « forze dissipative » o « forze d'attrito », che sono delle funzioni lineari della velocità. Queste forze possono essere descritte come derivate rispetto alle velocità di una certa funzione quadratica delle stesse velocità, detta funzione di dissipazione  $\Psi$ . La « forza d'attrito »  $f_a$ , corrispondente ad una qualsiasi delle coordinate generalizzate  $q_a$  del sistema, ha allora la forma

$$f_a = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_a}.$$

La funzione di dissipazione è una forma quadratica definita positiva delle velocità  $\dot{q}_a$ . La relazione scritta equivale alla

$$\delta \Psi = - \sum_a f_a \delta \dot{q}_a, \quad (34,1)$$

$\delta \Psi$  è la variazione della funzione di dissipazione in una variazione infinitesima delle velocità. Si può dimostrare che  $2\Psi$  dà la diminuzione dell'energia meccanica del sistema nell'unità di tempo.

È facile generalizzare la relazione (34,1) al caso del movimento con attrito in un corpo continuo. Lo stato del sistema è allora determinato da un insieme continuo di coordinate generalizzate; queste coordinate sono il vettore spostamento  $u$  assegnato in ogni punto del corpo. La relazione (34,1) deve risciversi in forma integrale

$$\delta \int \Psi dV = - \int f_i \delta \dot{u}_i dV, \quad (34,2)$$

dove  $f_i$  è la componente del vettore  $f$  della forza dissipativa agente sull'unità di volume del corpo; scriviamo qui la funzione di dissipazione totale del corpo intero nella forma  $\int \Psi dV$ , con  $\Psi$  funzione di dissipazione per unità di volume del corpo.

Troviamo ora la forma generale della funzione di dissipazione  $\Psi$  per i corpi deformabili. La funzione  $\Psi$ , descrivendo l'attrito interno, deve annullarsi se nel corpo non c'è movimento interno, cioè se questo non effettua altro che una rotazione o una traslazione d'insieme. In altri termini, la funzione di dissipazione deve annullarsi per  $\dot{u} = \text{cost}$  e per  $\dot{u} = [\Omega r]$ . Questo significa che la funzione non

deve dipendere dalla velocità stessa, ma dal suo gradiente, e che può contenere solo combinazioni di derivate che si annullano in corrispondenza a  $\dot{\mathbf{u}} = [\Omega \mathbf{r}]$ . Tali sono le somme

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i},$$

cioè le derivate  $\dot{u}_{ik}$  del tensore di deformazione rispetto al tempo<sup>1)</sup>. Ne consegue dunque che la funzione di dissipazione deve essere una funzione quadratica delle  $\dot{u}_{ik}$ . La forma più generale di una siffatta funzione è

$$\Psi = \frac{1}{2} \eta_{ijklm} \dot{u}_{ik} \dot{u}_{lm}. \quad (34,3)$$

Il tensore del quarto ordine  $\eta_{ijklm}$  può denominarsi tensore di viscosità. Possiede le evidenti proprietà di simmetria

$$\eta_{iklm} = \eta_{ilmk} = \eta_{hilm} = \eta_{ikml}. \quad (34,4)$$

L'espressione (34,3) è esattamente l'analogia dell'espressione (10,1) dell'energia libera di un cristallo: il tensore di elasticità è sostituito ora da  $\eta_{ijklm}$  e  $u_{ik}$  da  $\dot{u}_{ik}$ . In questo modo, tutti i risultati dedotti nel § 10 per il tensore  $\lambda_{ijklm}$  nei cristalli di differenti simmetrie si trasportano integralmente su  $\eta_{ijklm}$ .

Chiaramente, in un corpo isotropo  $\eta_{ijklm}$  ha due sole componenti indipendenti e  $\Psi$  può scriversi nella forma analoga all'espressione (4,3) per l'energia elastica di un corpo isotropo:

$$\Psi = \eta \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{u}_{ll}^2, \quad (34,5)$$

dove  $\eta$  e  $\zeta$  sono due coefficienti di viscosità. Poiché  $\Psi$  è definita positiva, i coefficienti  $\eta$  e  $\zeta$  debbono essere positivi.

La relazione (34,2) è esattamente la stessa di quella che si aveva per l'energia elastica libera:

$$\delta \int F dV = - \int F_i \delta u_i dV,$$

$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  essendo la forza agente sull'unità di volume del corpo.

Di qui, l'espressione della forza dissipativa  $f_i$  in funzione di  $\dot{u}_{ik}$  può scriversi direttamente per analogia con quella di  $F_i$  in funzione di  $u_{ik}$ . Si ha

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (34,6)$$

<sup>1)</sup> Qui i ragionamenti sono de tutto analoghi a quelli riguardanti un liquido viscoso nel VI, § 45.

dove il tensore dissipativo degli sforzi è determinato da

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_{ik}} = \eta_{iklm} \dot{u}_{lm}. \quad (34,7)$$

Si può dunque tenere conto delle viscosità nelle equazioni del movimento sostituendo semplicemente il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}$  con la somma  $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$ .

In un corpo isotropo:

$$\sigma'_{ik} = 2\eta \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right) + \xi \dot{u}_{ll} \delta_{ik}. \quad (34,8)$$

Naturalmente, questa espressione coincide formalmente con quella del tensore viscoso degli sforzi in un liquido.

### § 35. Assorbimento del suono nei corpi solidi

L'assorbimento del suono nei corpi solidi può essere calcolato nello stesso modo come il fattore di assorbimento nel caso dei liquidi (cfr. VI, § 77). Eseguiamo i conti corrispondenti per un corpo isotropo. La parte dell'energia dissipata a seguito della termoconduzione ( $\dot{E}_{mec}$ ) è data dall'integrale

$$-\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV.$$

Ma in presenza della viscosità, si dissipa ancora nell'unità di volume del corpo e nell'unità di tempo un'energia uguale a  $2\Psi$ , in modo che la parte totale di  $\dot{E}_{mee}$  dovuta alla viscosità è uguale all'integrale  $-2 \int \Psi dV$ . Utilizzando la (34,5), si ottiene

$$\dot{E}_{mec} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left( \dot{u}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{u}_{ll} \right)^2 dV - \xi \int \dot{u}_{ll}^2 dV. \quad (35,1)$$

Per calcolare il gradiente della temperatura, osserviamo che le vibrazioni sonore sono, in prima approssimazione, adiabatiche. Partendo dall'espressione (6,4) dell'entropia, scriviamo la condizione d'adiabaticità nella forma

$$S_0(T) + K \alpha u_{ii} = S_0(T_0),$$

dove  $T_0$  è la temperatura nello stato non deformato. Sviluppando la differenza  $S_0(T) - S_0(T_0)$  in serie di potenze di  $T - T_0$ , si ha, arrestandosi ai termini lineari,

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0} (T - T_0)$$

(la derivata dell'entropia è calcolata per  $u_{ii} = 0$ , cioè a volume costante). Si ha quindi

$$T - T_0 = -\frac{T \alpha K}{C_v} u_{ii}.$$

Utilizzando inoltre le relazioni

$$(3.16) \quad K = K_{\text{Isotropo}} = \frac{C_p}{C_p} K_{\text{ad}} \quad \text{e} \quad \frac{K_{\text{ad}}}{\rho} = c_t^2 - \frac{4}{3} c_t^2$$

scriviamo questa espressione nella forma

$$T - T_0 = - \frac{T \alpha \rho}{C_p} \left( c_t^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right) u_{ii}. \quad (35.2)$$

Consideriamo dapprima l'assorbimento delle onde elastiche trasversali. La termoconduzione non può dar luogo ad assorbimento di onde siffatte (all'approssimazione considerata). In effetti, in un'onda trasversale  $u_{ii} = 0$  e in virtù della (35.2) la temperatura è costante. Supponiamo di fissare come asse  $x$  la direzione di propagazione dell'onda; allora  $u_x = 0$ ,  $u_y = u_{0y} \cos(kx - \omega t)$ ,  $u_z = u_{0z} \cos(kx - \omega t)$ , e le componenti del tensore di deformazione non nulle sono

$$\text{essendo } u_{xy} = - \frac{u_{0y} k}{2} \sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = - \frac{u_{0z} k}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Rapportiamo la dissipazione dell'energia all'unità di volume del corpo; si ottiene per la media (temporale) di questa quantità a seguito della (35.1)

$$\dot{\overline{E}}_{\text{mec}} = - \frac{\eta \omega^4}{2c_t^2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

dove si è posto  $k = \omega/c_t$ . D'altra parte, l'energia media totale dell'onda è uguale al doppio dell'energia cinetica media, cioè  $\bar{E} = \rho \int u^2 dV$ ; rapportando ugualmente questa quantità all'unità di volume, si ha

$$(3.17) \quad \bar{E} = \frac{\rho \omega^2}{2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

Il fattore di assorbimento del suono è definito come il rapporto della dissipazione media dell'energia e del doppio del flusso medio d'energia nell'onda; questa quantità definisce la legge di variazione dell'ampiezza dell'onda con la distanza, che decresce secondo  $e^{-\gamma x}$ . Si trova quindi per il fattore di assorbimento delle onde trasversali la seguente espressione:

$$\gamma_t = \frac{|\dot{\overline{E}}_{\text{mec}}|}{2c_t \bar{E}} = \frac{\eta \omega^2}{2\rho c_t^3}. \quad (35.3)$$

In un'onda longitudinale  $u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $u_y = u_z = 0$ . Un calcolo analogo per mezzo delle (35.1) e (35.2) dà

$$\gamma_l = \frac{\omega^2}{2\rho c_t^3} \left[ \left( \frac{4}{3} \eta + \xi \right) + \frac{\kappa T \alpha^2 \rho^2 c_t^2}{C_p^2} \left( 1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2} \right)^2 \right]. \quad (35.4)$$

Rigorosamente, queste formule valgono solo per corpi amorfi completamente isotropi, ma per quel che concerne l'ordine di grandezza, definiscono la legge di assorbimento del suono anche per i monocristalli anisotropi.

L'assorbimento del suono in sostanze policristalline ha le sue peculiarità. Se la lunghezza dell'onda sonora  $\lambda$  è piccola rispetto alle dimensioni  $a$  dei diversi cristalliti, il suono è assorbito in ciascuno di questi nello stesso modo in cui lo sarebbe in un cristallo grande, ed il fattore di assorbimento è proporzionale a  $\omega^2$ .

Ma se  $\lambda \gg a$ , le caratteristiche dell'assorbimento variano. Si può considerare in una tale onda che ciascun cristallita subisca una pressione uniforme. Tuttavia, a seguito dell'anisotropia dei cristalliti e delle condizioni ai limiti sulle loro superfici di contatto, la deformazione che ne risulta non è uniforme, ma subisce variazioni rilevanti (dell'ordine della deformazione stessa) su una distanza uguale alle dimensioni del cristallita, e non su una lunghezza d'onda, come è per i corpi omogenei. Le velocità della variazione della deformazione  $u_{ih}$  e i gradienti di temperatura che appaiono sono importanti per l'assorbimento del suono. Le prime avranno, come in precedenza, un ordine di grandezza ordinario. Ma i gradienti di temperatura sono anomalmente grandi nei limiti di ogni cristallita. Pertanto, l'assorbimento del suono dovuto alla termoconduzione sarà grande rispetto a quello proveniente dalla viscosità, e quindi basta calcolare il primo.

Consideriamo due casi limite. Il tempo di livellamento della temperatura per termoconduzione su distanze  $\sim a$  (tempo di rilassamento per termoconduzione) è dell'ordine di  $a^2/\chi$ . Supponiamo dapprima  $\omega \ll \frac{\chi}{a^2}$ . Questo significa che il tempo di rilassamento è piccolo rispetto al periodo delle vibrazioni dell'onda, quindi, in ogni cristallita si stabilisce con largo margine l'equilibrio termico; abbiamo così delle vibrazioni quasi isoterme.

Siano  $T'$  le differenze di temperatura che si manifestano in un cristallita e  $T'_0$  quelle che si avrebbero in un processo adiabatico. La spesa di calore per conduzione (per unità di volume) è

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T' \sim \frac{\kappa T'}{a^2}.$$

La quantità di calore sprigionata nella deformazione è dell'ordine di  $T'_0 C \sim \omega T'_0 C$  ( $C$  è il calore specifico). Uguagliando queste due espressioni si ha

$$T' \sim T'_0 \frac{\omega a^2}{\chi}.$$

La temperatura varia di  $\sim T'$  su una distanza uguale alle dimensioni del cristallita, talché il suo gradiente è  $\sim T'/a$ . Infine si deduce

$T'_0$  (35,2) ponendo  $u_{ii} \sim ku \sim \frac{\omega}{c} u$  ( $u$  è l'ampiezza del vettore spostamento):

$$T'_0 \sim \frac{T_0 \rho c \omega}{C} u \quad (35,5)$$

(valutando gli ordini di grandezza, naturalmente non distinguiamo le differenti velocità del suono  $c$ ). Calcolando con l'ausilio di questo risultato la dissipazione di energia nell'unità di volume

$$\bar{E}_{\text{mec}} \sim \frac{\chi}{T} (\nabla T)^2 \sim \frac{\chi}{T} \left( \frac{T'}{a} \right)^2$$

e dividendo per il flusso d'energia  $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$ , si ottiene il fattore di smorzamento cercato

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2 \rho c a^2}{\chi C} \omega^2 \quad \text{per } \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \quad (35,6)$$

(C. Zener, 1938). Confrontando questa espressione con l'espressione usuale (35,3) e (35,4) si può dire che, nel caso considerato, l'assorbimento del suono da parte di un corpo policristallino avviene come se questo avesse una viscosità

$$\eta \sim \frac{T\alpha^2 \rho^2 c^4 a^2}{\chi C}$$

ben superiore alla viscosità reale dei cristalliti costituenti.

Consideriamo ora il caso opposto, in cui  $\omega \gg \chi/a^2$ . In altri termini, il tempo di rilassamento sia grande rispetto al periodo di oscillazione dell'onda, e le differenze di temperatura che insorgono nel corso della deformazione non si livellino affatto in ogni periodo. Ma sarebbe sbagliato considerare i gradienti di temperatura che determinano l'assorbimento del suono dell'ordine di  $T'_0/a$ , perché in questo modo si viene a tenere conto solo del processo di conduzione in ogni cristallita. Ora, lo scambio di calore tra cristalli vicini deve giocare un ruolo maggiore nel caso in esame (M. A. Issakovič, 1948). Se i cristalliti fossero separati con una barriera impenetrabile al calore, sulla superficie di contatto nascerebbero delle differenze di temperatura dello stesso ordine  $T'_0$  delle differenze di temperatura entro i limiti di uno stesso cristallita. Ma, in realtà, le condizioni di continuità ai limiti esigono la continuità della temperatura attraverso la superficie di contatto tra cristalliti. Allora, in queste condizioni, si hanno « onde di temperatura » che si « propagano » a partire dalla frontiera verso l'interno di un cristallita, e si smorzano alla distanza <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Ricordiamo che se un mezzo termoconduttore è limitato dal piano  $x = 0$ , la cui temperatura eccedente oscilla con la legge  $T' = T'_0 e^{-i\omega t}$ , la distribuzione della temperatura nel mezzo è descritta dall'« onda di temperatura »

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t} e^{-(1+i)x} \sqrt{\omega/2\chi}$$

cfr. VI, § 52).

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\chi}{\omega}}.$$

Nel caso presente  $\delta \ll a$ , cioè il gradiente di temperatura principale è dell'ordine di  $T'_0/\delta$  e si sviluppa su distanze piccole rispetto alle dimensioni generali del cristallita. La parte corrispondente del volume del cristallita è  $\sim a^2\delta$ ; riportandola al volume totale  $\sim a^3$ , si trova la dissipazione media di energia

$$\bar{\dot{E}}_{mec} \sim \frac{\chi}{T} \left( \frac{T'_0}{\delta} \right)^2 \frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\chi T'^2_0}{Ta\delta}.$$

Sostituendo a  $T'_0$  la sua espressione (35,5) e dividendo per  $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$  si ottiene il fattore di assorbimento cercato

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2 pc}{aC} \sqrt{\chi\omega} \quad \text{per } \omega \gg \frac{\chi}{a^2} \quad (35,7)$$

che risulta proporzionale alla radice della frequenza<sup>1)</sup>.

Così dunque, il fattore di assorbimento del suono in un corpo policristallino varia alle frequenze più basse ( $\omega \ll \chi/a^2$ ) come  $\omega^2$ ; quindi, nell'intervallo  $\frac{\chi}{a^2} \ll \omega \ll \frac{c}{a}$  varia proporzionalmente a  $\sqrt{\omega}$  ed infine, per  $\omega \gg \frac{c}{a}$ , il fattore è di nuovo proporzionale a  $\omega^2$ .

Considerazioni analoghe si ripetono per quanto riguarda lo smorzamento delle onde trasversali in sbarre e lamine sottili (C. Zener, 1938). Se  $h$  è lo spessore della sbarra o della lamina, per  $\lambda \gg h$ , il gradiente di temperatura è importante nella direzione trasversale e lo smorzamento è prodotto principalmente dalla conduzione termica (vedi i problemi di questo paragrafo). Se inoltre  $\omega \ll \chi/h^2$ , le vibrazioni potranno essere considerate come isotermi; così, calcolando, ad esempio, le autofrequenze di vibrazione della sbarra o della lamina, bisognerà utilizzare in questo caso i valori isotermi dei moduli di elasticità.

### PROBLEMI

- Determinare il fattore di smorzamento delle autovibrazioni longitudinali di una sbarra.

*Soluzione.* Il fattore di smorzamento nel tempo è definito

$$\beta = \frac{|\dot{\bar{E}}_{mec}|}{2\bar{E}}$$

<sup>1)</sup> La stessa dipendenza della frequenza caratterizza anche l'assorbimento del suono in un liquido o in un gas, nell'intorno di una parete solida (per esempio, in un tubo); cfr. VI, § 77.

e l'ampiezza delle vibrazioni decresce come  $e^{-\beta t}$ .

In un'onda longitudinale in ogni tronco elementare della sbarra si ha una trazione o una compressione semplice; le componenti del tensore di deformazione sono

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ad} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Scriveremo  $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$ , dove

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{E_{ad}/\rho}}.$$

I calcoli, analoghi a quelli del testo, danno per il fattore di smorzamento l'espressione

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^2 - 4c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)c_l^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)(3c_l^2 - 4c_t^2)} + \frac{\chi T \rho^2 \alpha^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Abbiamo introdotto, al posto di  $E_{ad}$ ,  $\sigma_{ad}$ , le velocità  $c_l$  e  $c_t$ , in virtù delle formule (22,4).

2. Stesso problema, per vibrazioni longitudinali in una lamina.

*Soluzione.* Per onde di vibrazioni parallele alla direzione dell'onda (all'asse  $x$ ), le componenti non nulle del tensore di deformazione sono

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(cfr. la (13,4)). La velocità di propagazione di queste onde è uguale a

$$\sqrt{\frac{E_{ad}}{\rho(1 - \sigma_{ad}^2)}}.$$

Il calcolo fornisce

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^4 + 4c_t^4 - 6c_l^2c_t^2}{c_l^2c_t^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_t^2(c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\chi T \alpha^2 \rho^2 (1 + \sigma_{ad})^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Per onde con vibrazioni perpendicolari alla direzione di propagazione si ha  $u_{ll} = 0$  e lo smorzamento proviene dalla sola viscosità  $\eta$ . Il fattore di smorzamento per questo caso è sempre fornito dalla formula

$$\beta = \frac{\eta \omega^2}{2\rho c_t^2}.$$

Lo smorzamento delle vibrazioni di torsione nelle sbarre si ricollega a questi casi.

3. Determinare il fattore di smorzamento delle autovibrazioni trasversali di una sbarra (di frequenze  $\omega \gg \chi/h^2$ , dove  $h$  è lo spessore della sbarra).

*Soluzione.* Il ruolo fondamentale nello smorzamento spetta alla termoconduzione. Conformemente al § 17, in ogni elemento di volume della sbarra si ha

$$u_{zz} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{ad} \frac{x}{R}$$

(flessione nel piano  $x, z$ ). Per  $\omega \gg \chi/h^2$  le vibrazioni sono adiabatiche; in flessione debole il raggio di curvatura è  $R = 1/X''$ , talché

$$u_{ii} = (1 - 2\sigma_{ad}) x X''$$

(si deriva rispetto a  $z$ ). La temperatura varia più rapidamente trasversalmente alla sbarra; così  $(\nabla T)^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$ . Mediante le (35,1) e (35,2) si ha per la dissipazione

pazione media di energia in tutta la sbarra

$$\frac{\kappa T \alpha^2 E_{\text{ad}}^2 S}{9C_p^2} \int \overline{X''^2} dz$$

( $S$  è l'area della sezione della sbarra). Si può trovare l'energia totale media come il doppio dell'energia potenziale:

$$E_{\text{ad}} I_y \int \overline{X''^2} dz$$

Si ottiene in definitiva per il fattore di smorzamento

$$\beta = \frac{\kappa T \alpha^2 E_{\text{ad}} S}{18 I_y C_p^2}$$

#### 4. La stessa cosa per le vibrazioni trasversali di una lamina.

*Soluzione.* Secondo la (11,4), in ogni elemento di volume della lamina si ha

$$u_{ii} = -\frac{1-2\sigma_{\text{ad}}}{1-\sigma_{\text{ad}}} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(flessione nel piano  $x, z$ ). Si ottiene la dissipazione d'energia a partire dalle (35,1) e (35,2), e l'energia media totale raddoppiando l'espressione (11,6). Il fattore di smorzamento è

$$\beta = \frac{2\kappa T \alpha^2 E_{\text{ad}}}{3C_p^2 h^2} \frac{1+\sigma_{\text{ad}}}{1-\sigma_{\text{ad}}} = \frac{2\kappa T \alpha^2 \rho (3c_l^2 - 4c_t^2)^2 c_t^2}{3C_p^2 h^2 (C_l^2 - c_t^2) c_l^2}.$$

5. Determinare la variazione delle autofrequenze delle vibrazioni trasversali di una sbarra a seguito della non adiabaticità delle vibrazioni. La sbarra ha la forma di una lamina, di spessore  $h$ . La superficie della sbarra è supposta protetta contro perdite di calore.

*Soluzione.* Sia  $T_{\text{ad}}(x, t)$  la distribuzione della temperatura nella sbarra per vibrazioni adiabatiche,  $T(x, t)$  la distribuzione effettiva ( $x$  è la coordinata secondo lo spessore della sbarra; si trascura la variazione della temperatura nel piano  $y, z$ , in quanto più lenta). Poiché  $T = T_{\text{ad}}$  implica che non vi sia scambio di calore tra i diversi tronchi della sbarra, è chiaro che l'equazione del calore deve avere la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (T - T_{\text{ad}}) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Per vibrazioni periodiche, di frequenza  $\omega$ , le deviazioni  $\tau_{\text{ad}} = T_{\text{ad}} - T_0$ ,  $\tau = T - T_0$  della temperatura a partire dal valore di equilibrio  $T_0$  sono proporzionali a  $e^{-i\omega t}$ , e si ha

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} \tau_{\text{ad}}$$

(derivazione rispetto ad  $x$ ). Poiché, dalla (35,2),  $\tau_{\text{ad}}$  è proporzionale a  $u_{ii}$  e le componenti  $u_{ih}$  (cfr. § 17) a  $x$ , si ha  $\tau_{\text{ad}} = Ax$ , dove  $A$  è una costante che non occorre calcolare (non figura nella risposta finale). La soluzione dell'equazione  $\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} Ax$ , con la condizione al limite  $\tau' = 0$  per  $x = \pm \frac{h}{2}$  (la superficie della sbarra è isolante), è

$$\tau = A \left( x - \frac{\sin kx}{k \cos k \frac{h}{2}} \right), \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Il momento  $M_y$  degli sforzi interni nella sbarra incurvata (flessione nel piano  $x, z$ ) è costituito da una parte isotermica  $M_{y \text{ iso}}$  (momento della flessione isotermica) e da una parte risultante dal riscaldamento non uniforme della sbarra. Se  $M_{y \text{ ad}}$  è il momento in una flessione adiabatica, nel corso di un processo non completamente adiabatico, la parte supplementare del momento diminuisce rispetto a  $M_{y \text{ ad}} - M_{y \text{ iso}}$  nel rapporto

$$1 + f(\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau dz / \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{\text{ad}} dz.$$

Definendo in corrispondenza ad una frequenza arbitraria  $\omega$  il modulo di Young  $E_\omega$  come coefficiente di proporzionalità tra  $M_y$  e  $\frac{I_y}{R}$  (cfr. la (17,8)) e notando che  $E_{\text{ad}} - E = E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}$  (cfr. la (6,8);  $E$  è il modulo di Young isotermo), si può scrivere

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)] E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}.$$

Il calcolo fornisce per  $f(\omega)$

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3 k^3} \left( \frac{kh}{2} - \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \right).$$

Per  $\omega \rightarrow \infty$  si ottiene, come ci si aspetta,  $f = 1$ , talché  $E_\infty = E_{\text{ad}}$ , e per  $\omega \rightarrow 0$ , si ha  $f = 0$  e  $E_0 = E$ .

Le autofrequenze delle vibrazioni vanno come la radice del modulo di Young (cfr. problemi 4, 5, 6, § 25). Così si ha

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + f(\omega_0) \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right],$$

dove  $\omega_0$  designa i valori delle autofrequenze quando le vibrazioni sono completamente adiabatiche. Il valore di  $\omega$  trovato è complesso. Separando la parte reale e immaginaria ( $\omega = \omega' + i\beta$ ), si ottiene per l'autofrequenza

$$\omega' = \omega_0 \left[ 1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p h^2} \frac{1}{\xi^3} \frac{\operatorname{sh} \xi - \operatorname{sen} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \operatorname{cos} \xi} \right]$$

e per il fattore di smorzamento

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2 \chi}{3C_p h^2} \left[ 1 - \frac{1}{\xi} \frac{\operatorname{sh} \xi + \operatorname{sen} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \operatorname{cos} \xi} \right]$$

$$\text{con } \xi = h \sqrt{\frac{\omega_0}{2\chi}}.$$

Per grandi valori di  $\xi$ , la frequenza  $\omega$  tende, come deve, a  $\omega_0$  ed il fattore di smorzamento verso

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2 \chi}{3C_p h^2}$$

conformemente al risultato del problema 3.

Per piccoli valori di  $\xi$ , corrispondenti a condizioni quasi isotermi, si ha

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right) \approx \omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{ad}}}$$

e per il fattore di smorzamento

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2 h^2}{180C_p \chi} \omega^2$$

### § 36. Liquidi molto viscosi

Per i liquidi tipici, l'equazione di Navier — Stokes è valida fintantoché i periodi del moto sono grandi rispetto ai tempi molecolari. Ma questo non si estende ai liquidi molto viscosi: per questi le equazioni usuali dell'idrodinamica diventano inapplicabili già quando i periodi dei movimenti sono molto più grandi. Esistono dei liquidi viscosi che si comportano, in lassi di tempo sufficientemente piccoli (ma grandi rispetto alle durate molecolari), come corpi solidi (quali la colofonia, la glicerina). I corpi solidi amorfi, quali il vetro, possono essere considerati come casi limite di liquidi molto viscosi di questo tipo.

Le proprietà di questi liquidi possono essere descritte con il seguente procedimento (dovuto a *Maxwell*). In un intervallo di tempo piccolo la loro deformazione è elastica. Terminata la deformazione, essi conservano degli sforzi di scorrimento, che si smorzano nel tempo, in modo tale che, passato un tempo sufficientemente lungo, gli sforzi interni nel liquido sono virtualmente spariti. Sia  $\tau$  l'ordine di grandezza del tempo di smorzamento degli sforzi (lo si denomina a volte tempo maxwelliano di rilassamento). Supponiamo che il liquido subisca l'azione delle forze esterne periodiche di frequenza  $\omega$ . Se il periodo  $1/\omega$  della variazione delle forze è grande rispetto a  $\tau$ , cioè  $\omega\tau \ll 1$ , il liquido considerato si comporterà come un liquido viscoso ordinario. Nel caso opposto, per frequenze  $\omega$  sufficientemente grandi (quando  $\omega\tau \gg 1$ ) il liquido si comporterà come un corpo solido amorfico.

In virtù di queste proprietà « intermedie » dei liquidi considerati, li si può caratterizzare simultaneamente con il coefficiente di viscosità  $\eta$  e con un certo « modulo di scorrimento »  $\mu$ . È facile dedurre una relazione tra gli ordini di grandezza di  $\eta$ ,  $\mu$  e del tempo di rilassamento  $\tau$ . Sotto l'azione di forze periodiche di frequenza sufficientemente piccola, quando il liquido si comporta come liquido ordinario, il tensore degli sforzi è determinato dall'espressione usuale per gli sforzi viscosi in un liquido, cioè

$$\sigma_{ih} = 2\eta \dot{u}_{ih} = -2i\eta\omega u_{ih}.$$

Nell'altro caso limite, di grandi frequenze, il liquido si comporta come un solido, e gli sforzi interni devono essere determinati dalle

formule della teoria dell'elasticità, cioè  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$  (si tratta sempre di « deformazioni di scorrimento puro », talché si suppone  $u_{ii} = 0$ ,  $\sigma_{ii} = 0$ ). Per frequenze  $\omega \sim 1/\tau$  gli sforzi definiti da queste due espressioni debbono coincidere per quanto concerne l'ordine di grandezza. Si ha così  $\frac{\eta u}{\lambda \tau} \sim \frac{\mu u}{\lambda}$ , quindi

$$\eta \sim \tau \mu \quad (36,1)$$

che è la relazione cercata.

Deduciamo infine l'equazione del movimento che descrive qualitativamente il comportamento dei fluidi considerati. A tal fine, partiremo dall'ipotesi più semplice sulla legge di smorzamento degli sforzi interni (dopo l'arresto del moto), perciò supporremo questo decadimento come esponenziale, cioè in formule

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \sigma_{ik}.$$

D'altra parte, in un corpo solido si avrebbe  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$  e di conseguenza

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt}.$$

È facile vedere che l'equazione

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = 2\mu \frac{du_{ik}}{dt} \quad (36,2)$$

conduce a risultati giusti nei due casi limite di movimenti lenti e rapidi, e può quindi servire come equazione « d'interpolazione » per i casi intermedi.

Così, per un moto periodico, quando  $u_{ik}$  e  $\sigma_{ik}$  dipendono dal tempo per il tramite del fattore  $e^{-i\omega t}$ , dalla (36,2) segue:

$$-i\omega \sigma_{ik} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik} = -2i\omega \mu u_{ik},$$

da cui

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega \tau}} u_{ik}. \quad (36,3)$$

Per  $\omega \tau \gg 1$  questa formula dà  $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ , cioè l'espressione usuale per i corpi solidi, e per  $\omega \tau \ll 1$

$$\sigma_{ik} = -2i\mu \tau \omega u_{ik} = 2\mu \tau \dot{u}_{ik}$$

che è l'espressione usuale per un liquido di viscosità  $\mu \tau$ .

## Indice analitico<sup>1)</sup>

- Coefficiente di compressione uniforme, 22  
dilatazione termica, 27, 56  
Lamé, 20  
Poisson, 24  
Compressione uniassiale, 26  
uniforme, 16, 20  
Concentrazione degli sforzi, 37
- Deformazione di un cilindro, 33, ecc.  
elasticità, 18  
piana, 30  
plastica, 18, 166  
di una sfera, 32, ecc.  
Densità di dislocazioni, 166  
flusso di dislocazioni, 167  
Dislocazioni di bordo, 152, 159, 164  
elicoidale, 153, 159, 163
- Equazioni biarmoniche, 30, 35
- Green, tensore di, 40, 42
- Instabilità elastica, 83, 121
- Liquido di Maxwell, 195
- Membrana, 78, 80  
Modulo di compressione uniforme, 21  
scorrimento, 21  
trazione (di Young), 24  
Moduli adiabatici, 28  
di elasticità nei cristalli, 50  
isotermini, 27  
Momento di dislocazione, 156, 168
- Piano di scorrimento, 162  
Problema di contatto, 44
- Riflessione del suono, 129, ecc.  
Rigidità di torsione, 90  
flessione, 63, 112
- Scorrimento, 20  
Sforzi interni, 13  
Stato di sforzo piano, 69  
Superficie neutra, 58, 94
- Tensione superficiale, 67  
Tensore di distorsione, 154  
Trazione semplice, 24
- Velocità del suono, 127  
di gruppo, 134  
Vettore di Burgers, 153  
spostamento, 9  
Vibrazioni proprie (autovibrazioni) di  
una cavità, 132  
lamina, 145  
palla, 131  
sbarra, 143

<sup>1)</sup> Questo indice completa, senza ripetizioni, l'indice del libro. Vi sono inclusi termini e nozioni non direttamente riportati nell'indice.

**Finito di stampare nell'agosto 1978  
dalla Tipografia n. 7 di Mosca  
per conto degli Editori Riuniti, Roma**